Über eine Klasse von Integralgleichungen mit Cauchyschem Hauptwert.

Inaugural - Dissertation

zur Erlangung des akademischen Grades eines

Doktors der Naturwissenschaften

der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät

der Universität des Saarlandes

vorgelegt von

Gerhard Hery

aus Homburg

Saarbrücken 1965

Über eine Klasse von Integralgleichungen mit Cauchyschem Hauptwert.

Inaugural - Dissertation

zur Erlangung des akademischen Grades eines
Doktors der Naturwissenschaften
der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Universität des Saarlandes

vorgelegt von

Gerhard Hery

aus Homburg

Saarbrücken 1965

Tag der mündlichen Prüfung: 24.12.1965

Der Dekan: Professor Dr.F.Seel

Berichterstatter: Professor Dr.H.Söhngen

Privatdozent Dr.E.Meister

Inhalt:

Einleitung III

Kapitel I 1

§ 1. Die Kurvenklassen K^m. 1

§ 2. Die Funktionenklassen $H^m_\alpha(L), C^m_\alpha(L)$ 3

§ 3. Die Cauchy-Transformation, angewendet auf Funktionen aus $H^o_\alpha(L)$. 17

Kapitel II 48

§ 1. Eine spezielle Klasse von Grundräumen mit den zugehörigen verallgemeinerten Funktionen... 48

§ 2. Definition der Multiplikation einer Funktion mit einer verallgemeinerten Funktion, Definition und einige Eigenschaften des Operators S' für Elemente aus $H^m_\alpha(L)'_m$. 59

Kapitel III 63

§ 1. Über eine Klasse singulärer Integralgleichungen.... 63

§ 2. Eine Verallgemeinerung der in § 1 untersuchten Gleichung und ihre Behandlung in Räumen verallgemeinerter Funktionen $H^m_\alpha(L)'_m$. 73

§ 3. Vergleich der in § 1 und § 2 behandelten Gleichungen. 80

Anhang 85

Literatur 90

UNIVERSITEITSBIBLIOTHEEK
LEIDEN

Einleitung

Die Arbeiten von NIKOLSKI (7), bzw. ATKINSON (1) geben notwendige und hinreichende Bedingungen dafür an, dass eine lineare Gleichung in einem Banachraum eine Fredholmsche bzw. eine Noethersche Gleichung ist, deren Lösungsmannigfaltigkeiten höchstens endlich-dimensional sind.

Mit einer Methode, die auf diesen Ergebnissen beruht, konnte B. V. CHVEDELIDZE (3) die Gültigkeit der Noetherschen Sätze für die folgende Klasse singulärer Integralgleichungen mit Cauchyschem Kern in bewichteten L_p-Räumen zeigen:

$$(1) \qquad a(t)\,\varphi(t) + b(t)\cdot S\varphi(t) + V\varphi(t) = \psi(t).$$

Hierbei bedeutet $S\varphi = \frac{1}{i\pi}\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}\,d\tau$ die Cauchy-Transformation, wobei das Integral im Sinne des Cauchyschen Hauptwertes zu verstehen ist. Der Operator V ist ein beliebiger vollstetiger Operator im betrachteten Raum. Die Kurve L in der komplexen Zahlenebene, sowie die Koeffizienten a(t), b(t) genügen geeigneten Voraussetzungen.

Zum Beweis der Noetherschen Sätze genügt es nach ATKINSON (1) zu zeigen, dass die sogenannte Hauptteilgleichung

$$(2) \qquad a(t)\varphi(t) + b(t)\cdot S\varphi(t) = \psi_1(t)$$

im betrachteten Raum eine Noethersche Gleichung ist.

In der vorliegenden Arbeit ist es gelungen, Gleichungen vom Typ (2) in den Räumen verallgemeinerter Funktionen $H_d^m(L)'_m$ einen Sinn zu geben und zwar derart, dass diese Gleichungen:

$$(3) \qquad a(t)\,f + b(t)\,S'f = g$$

für verallgemeinerte Funktionen $f \in H_d^m(L)'_m$, die mit Funktionen $f(t) \in H_d^m(L)_m$ identifiziert werden können, in Gleichungen vom Typ (2) in $H_d^m(L)_m$ übergehen.

Mit der gleichen Methode wie bei CHVEDELIDZE (3) konnte gezeigt werden, dass für Gleichungen vom Typ (1) in den Funktionenräumen $H_d^m(L)_m$ und für Gleichungen vom Typ:

$$(4) \qquad a(t)f + b(t)\,S'f + V'_b f = g$$

in den zugehörigen konjugierten Räumen verallgemeinerter Funktionen $H_d^m(L)'_m$ die Noetherschen Sätze gültig bleiben. V'_b in (4) ist ein beliebiger, in $H_d^m(L)'_m$ vollstetiger Operator, der diesen Raum in sich abbildet. L stellt eine geschlossene, genügend glatte Jordankurve endlicher Länge in der komplexen Zahlenebene dar.

Im ersten Kapitel werden die im folgenden benötigten Kurven- und Funktionenklassen K_d^m bzw. $H_d^m(L)$ und $C_d^m(L)$ untersucht. In $H_d^m(L)$ wird eine Norm $H_d^i(\varphi, L)$ eingeführt, wodurch der lineare Raum $H_d^m(L)$ zu einem linearen, normierten Raum $H_d^m(L)_i$ wird. Es zeigt sich, dass $H_d^m(L)_m$ ein Banachraum ist.

Die Cauchy-Transformation S erweist sich als lineare und beschränkte Transformation, die den Raum $H_{\alpha}^{m}(L)_{m}$ in sich abbildet. Weitere Untersuchungen gelten der Vertauschbarkeit von Differentiation und Anwendung der Cauchy-Transformation. Schliesslich wird mit Satz 8 ein wesentliches Hilfsmittel zum späteren Nachweis der Gültigkeit der Noetherschen Sätze für Gleichungen vom Typ (2) zur Verfügung gestellt.

Im zweiten Kapitel werden die zu obigen Banachräumen $H_{\alpha}^{m}(L)_{m}$ gehörigen konjugierten Räume $H_{\alpha}^{m}(L)_{m}'$ untersucht, deren Elemente als eine Klasse verallgemeinerter Funktionen auf L aufgefasst werden können.

Das dritte Kapitel enthält die Behandlung der Gleichungen vom Typ (1) und (4) mit dem Nachweis der Gültigkeit der Noetherschen Sätze für diese Gleichungen in den entsprechenden Räumen.

Ein kurzer Vergleich der von MUSKHELISHVILI (6) untersuchten Klasse singulärer Integralgleichungen mit den Gleichungen vom Typ (1) in $H_{\alpha}^{m}(L)_{m}$ schliesst sich an die Behandlung letzterer in § 1 von Kapitel III an. Im letzten Paragraphen von Kapitel III wird gezeigt, dass die Gleichungen vom Typ (3) in $H_{\alpha}^{m}(L)_{m}'$ echte Verallgemeinerungen der Gleichungen vom Typ (2) in $H_{\alpha}^{m}(L)_{m}$ darstellen.

Die Arbeit von KAKIČEV (4) gab die Anregung, als Grundräume die Räume $H_{\alpha}^{m}(L)_{m}$ zu wählen und die Cauchy-Transformation für Elemente aus $H_{\alpha}^{m}(L)_{m}'$ so wie in § 2, Kapitel II zu definieren. Da KAKIČEV nicht angibt, welche Topologie in seinen Grundräumen gültig ist, kann nicht gesagt werden,

dass die von ihm betrachteten verallgemeinerten Funktionen identisch sind mit den in dieser Arbeit eingeführten Elementen aus $H_d^m (L)'_m$. Daher erschien es sinnvoll, die unter Bemerkung 3, Kapitel II angeführten Aussagen, die KAKIČEV schon angibt, für die Elemente aus $H_d^m (L)'_m$ zu zeigen.

Mein Dank gilt Herrn Prof. Dr. H. Söhngen, der mir die Anfertigung der vorliegenden Arbeit im Anschluss an meine Diplomarbeit über eine Klasse singulärer Integralgleichungen ermöglichte, sowie Herrn Priv. Dozent Dr. E. Meister, der die Anregung zu den speziellen Untersuchungen gab.

Kapitel I.

Einige Kurven- und Funktionenklassen.

§ 1. Die Kurvenklassen K^m.

Im folgenden betrachten wir einfacne, geschlossene, glatte Kurven L endlicher Länge in der komplexen Zahlenebene, in der Oxy ein kartesisches Koordinatensystem sei.

1.) L kann dargestellt werden in der Form

$$t(s) = x(s) + i\, y(s) ,$$

wobei t(s) derjenige Punkt von L ist, der dem Parameterwert s entspricht. Als Parameter kann die Bogenlänge gewählt werden. Im folgenden bedeute s stets die Bogenlänge, so dass L gegeben ist durch

$$(1) \qquad t(s) = x(s) + i\, y(s) , \qquad (o \leqslant s \leqslant 1)$$

Da die Kurve L geschlossen ist, kann jeder Punkt von L als Anfangspunkt zur Berechnung der Bogenlänge gewählt werden und es gilt:

$$(2) \qquad t(o) = t(1).$$

t(s) sei periodisch mit der Periode 1 auf ganz $\mathbb{R}$ fortgesetzt.

2.) L ist eine glatte Kurve, d.h. x(s) und y(s) sind in [o, 1] stetig differenzierbar und die Ableitungen $\dot{x}(s)$ sowie $\dot{y}(s)$ nach der Bogenlänge verschwinden an keiner

Stelle von $[\,o,\,1\,]$ gleichzeitig. Die Ableitungen in den Randpunkten sind als Grenzwerte der inneren Ableitungen zu verstehen, wobei die folgenden Beziehungen gelten sollen:

$$(3) \qquad \dot{x}\,(1-o) = \dot{x}\,(o+o)\,, \quad \dot{y}\,(1-o) = \dot{y}\,(o+o).$$

3.) L ist einfach, d.h. die Gleichungen

$$(4) \qquad x\,(s_1) = x\,(s_2) \text{ und } y\,(s_1) = y\,(s_2)$$

sind unverträglich für $o < s_1, s_2 < 1\,, \; s_1 \neq s_2$.

4.) Mit der Bogenlänge s als Parameter gilt:

$$(5) \qquad [\dot{x}\,(s)]^2 + [\dot{y}\,(s)]^2 = 1$$

Da L glatt ist, gilt für beliebige feste Punkte $t_1, t_2 \in L$, $(t_i = t\,(s_i))$ die folgende wichtige Beziehung:

$$(6) \qquad |t_1 - t_2| = k \cdot \sigma_{12}\,, \quad o < k_o \leq k \leq 1\,,$$

wobei σ_{12} die Länge des kürzeren Bogens zwischen den Punkten t_1 und t_2 ist. Den Beweis dieser Eigenschaft findet man bei MUSKHELISHVILI (6).

Aus (6) folgt sofort, dass für jedes Punktepaar $t_1, t_2 \in L$ die folgende Beziehung richtig ist:

$$(7) \qquad o < k_o \leq \frac{|t_1 - t_2|}{\sigma_{12}} \leq 1\,,$$

wobei k_o eine von der Wahl der Punkte $t_1, t_2 \in L$ unabhängige Konstante ist.

Definition 1 :

1.) K^1 sei die Klasse der beschriebenen Kurven.

2.) K^m , $(m \in \mathbb{N})$ sei die Unterklasse derjenigen Kurven aus K^1, deren Ableitungen nach s in $[o, 1]$ bis zur $(m-1)$ -ten Ordnung einschliesslich Kurven aus K^1 darstellen.

§ 2. Die Funktionenklassen $H_\alpha^m(L)$ und $C_\alpha^m(L)$.

$\varphi(t) = \varphi(t(s))$ sei eine im allgemeinen komplexwertige Funktion, die auf $L \in K^1$, bzw. für $s \in [o, 1]$ definiert ist, wobei $t = t(s)$ die Parameterdarstellung von L mit s als Bogenlänge bedeutet.

Definition 2 : $\varphi(t) = \varphi(t(s))$ genügt auf L, bzw. in $[o, 1]$ einer Hölderbedingung, wenn für je zwei Punkte $t_1, t_2 \in L$, bzw. $s_1, s_2 \in [o, 1]$ die folgende Ungleichung gilt:

$$|\varphi(t_2) - \varphi(t_1)| \leq M \cdot |t_2 - t_1|^\alpha \text{ , bzw.}$$

$$|\varphi(t(s_1)) - \varphi(t(s_2))| \leq M \cdot \sigma_{12}^\alpha \text{ .}$$

M heisst Hölderkonstante, α Hölderindex, und im folgenden sei stets α fest mit :

$$o < \alpha < 1 \text{ .}$$

Definition 3: Die Funktionenklasse $H_\alpha^m(L)$.

$H_\alpha^m(L)$ ist die Menge derjenigen Funktionen $\varphi(t)$, die auf L definiert und eindeutig sind, dort m-mal stetig nach t differenzierbar sind und deren m-te Ableitung nach t auf L einer Hölderbedingung mit Index α genügt.

Definition 4: Die Funktionenklasse $C_\alpha^m(L)$.

$C_\alpha^m(L)$ ist die Menge derjenigen Funktionen $\varphi(t) = \varphi(t(s))$, die auf L, bzw. in $[o,1]$ definiert sind und nach periodischer Fortsetzung auf ganz $\mathbb{R}$ m-mal stetig nach s differenzierbar sind und deren m-te Ableitung nach s in $[o,1]$ einer Hölderbedingung mit Index α genügt.

Definition 5: Die Kurvenklasse K_α^m.

K_α^m ist die Unterklasse derjenigen Kurven aus K^m deren m-te Ableitung nach der Bogenlänge s in $[o,1]$ einer Hölderbedingung mit Index α genügt.

Bemerkung 1: 1.) Wenn nicht andere Voraussetzungen besonders hervorgehoben werden, so sind alle im folgenden betrachteten Kurven L aus K_α^1. $t = t(s)$ mit $o \leqslant s \leqslant 1$ ist die Parameterdarstellung von L mit der Bogenlänge s als Parameter.

Wegen § 1 Abschnitt 1.) und 2.) gilt :

t (s) ist eine in $\mathbb{R}$ erklärte, periodische Funktion mit der Periode 1, die dort stetig differenzierbar ist und deren Ableitung an keiner Stelle verschwindet.

2.) Im folgenden ist m stets eine feste Zahl mit:

α.) $m \geqslant 0$.
ß.) $m \in \mathbb{Z}$.

3.) Wenn keine Verwechslung möglich ist, so werden der einfacheren Schreibweise wegen bei den Funktionen gelegentlich die Argumente weggelassen.

Satz 1 : Ist $L \in K_\alpha^1$, so ist genau dann $\varphi(t) \in H_\alpha^0(L)$, wenn $\varphi(t(s)) \in C_\alpha^0(L)$ ist.

Beweis: a) Aus $\varphi(t) \in H_\alpha^0(L)$ folgt $\varphi(t(s)) \in C_\alpha^0(L)$, denn mit (7) ergibt sich:

$$\left|\varphi(t(s_1)) - \varphi(t(s_2))\right| = \left|\varphi(t_1) - \varphi(t_2)\right| \leqslant M \cdot \left|t_1 - t_2\right|^\alpha \leqslant M\sigma_{12}^\alpha ,$$

d.h. $\varphi(t(s)) \in C_\alpha^0(L)$.

b) Sei $\varphi(t(s)) \in C_\alpha^0(L)$. Mit Hilfe von (7) erhält man:

$$\left|\varphi(t_1) - \varphi(t_2)\right| = \left|\varphi(t(s_1)) - \varphi(t(s_2))\right| \leqslant M \cdot \sigma_{12}^\alpha \leqslant \frac{M}{k_o^\alpha} \left|t_1 - t_2\right|^\alpha = M_1 \cdot \left|t_1 - t_2\right|^\alpha ,$$

d.h. $\varphi(t) \in H_\alpha^0(L)$.

Satz 2 : Ist $L \in K_\alpha^m$, so gilt genau dann $\varphi(t) \in H_\alpha^m(L)$, wenn $\varphi(t(s)) \in C_\alpha^m(L)$ ist und zwar für jedes feste m.

Beweis: 1.) Aus $\varphi(t) \in H_\alpha^m(L)$ folgt $\varphi(t(s)) \in C_\alpha^m(L)$.

$\frac{d^\ell}{dt^\ell}\varphi(t)$, $(\ell = 0,1,\ldots, m)$ existiert und genügt auf L einer Hölderbedingung mit Index α, denn $\varphi^{(\ell)}(t)$ genügt für $\ell = 0,1,\ldots, m-1$ einer Hölderbedingung mit Index 1 und damit auch mit Index $\alpha < 1$. $\varphi^{(m)}(t)$ genügt nach Voraussetzung einer Hölderbedingung mit Index α. Nach Satz 1 folgt, dass $\frac{d^\ell}{dt^\ell}\varphi(t(s))$, $(\ell = 0,1,\ldots, m)$ als Funktion von s einer Hölderbedingung mit Index α in $[0, 1]$ genügt.

Da $L \in K_\alpha^m$ ist, existiert $\frac{d^k}{ds^k} t(s)$, $(k = 0,1,\ldots,m)$ und $\frac{d^m}{ds^m} t(s)$ genügt in $[0, 1]$ einer Hölderbedingung mit Index α.
Folglich genügt $\frac{d^k}{ds^k} t(s)$, $(k = 0,1,\ldots, m)$ in $[0, 1]$ einer Hölderbedingung mit Index α.
Hieraus folgt die Behauptung 1.)

2.) Aus $\varphi(t(s)) \in C_\alpha^m(L)$ folgt $\varphi(t) \in H_\alpha^m(L)$.

Es gilt:

$$(8) \qquad \frac{d^k}{dt^k}\varphi(t) = \overline{\dot{t}(s)}\frac{d}{ds}\Big(\ldots \overline{\dot{t}(s)}\frac{d}{ds}\varphi(t($$

wobei die Operation $\overline{\dot{t}(s)}\frac{d}{ds}$ k-mal anzuwenden ist $(k = 0,1,\ldots, m)$.

Da $\varphi(t(s)) \in C_a^m(L)$ und $L \in K_a^m$ ist, so existiert nach (8) $\frac{d^k}{dt^k}\varphi(t)$, $(k = o,1, \ldots, m)$ und genügt als Funktion von s in $[o, 1]$ einer Hölderbedingung mit Index a. Mit Hilfe von Satz 1 erhält man hiermit die Behauptung.

Bemerkung 2 : 1.) Die Gleichheit, sowie die Addition zweier Funktionen aus $H_a^m(L)$ und die Multiplikation einer Funktion aus $H_a^m(L)$ mit einer komplexen Zahl sei in der üblichen Art erklärt.

Es ist klar, dass diese Operationen nicht aus der betrachteten Klasse herausführen und dass $H_a^m(L)$ dann ein Linearsystem ist.

2.) Offensichtlich gilt für $k \geqslant m$:

$$H_a^k(L) \subseteq H_a^m(L).$$

Definition 6: Sei i fest , $o \leqslant i \leqslant m$. Durch

$$(9) \qquad H_a^i(\varphi, L) = \sum_{k=o}^{i} \max_{t\in L} \left|\varphi^{(k)}(t)\right| + \sup_{t_1,t_2\in L} \frac{\left|\varphi^{(i)}(t_1) - \varphi^{(i)}(t_2)\right|}{\left|t_1 - t_2\right|^a}$$

wird in $H_a^m(L)$ eine Norm erklärt. $H_a^m(L)$ wird durch Einführung dieser Norm zu einem normierten Raum, der durch $H_a^m(L)_i$ bezeichnet wird.

Der Nachweis der Normeigenschaften für $H_a^i(\varphi, L)$:

1.) $H_a^i(\varphi, L) \geqslant o$, $= o \leftrightsquigarrow \varphi(t) \equiv o$; $\varphi(t) \in H_a^m(L)$,

2.) $H_a^i(\varphi+\psi, L) \leqslant H_a^i(\varphi, L) + H_a^i(\psi, L)$; $\varphi(t), \psi(t) \in H_a^m(L)$,

3.) $H_a^i(\lambda\varphi, L) = |\lambda| \cdot H_a^i(\varphi, L)$; λ komplex,

ist trivial. Durch die Eigenschaften 1.) - 3.) ist die Definition 6 als sinnvoll gerechtfertigt.

Hilfssatz 1 : Vor.: $\varphi(t) \in H_\alpha^1(L)$

Beh.: $$\sup_{t_1,t_2\in L} \frac{|\varphi(t_1)-\varphi(t_2)|}{|t_1-t_2|^\alpha} \leq K \max_{t\in L} \left|\frac{d\varphi(t)}{dt}\right| ,$$

wobei die Konstante K nicht von $\varphi(t)$ abhängt.

Beweis: Da $\varphi(t) \in H_\alpha^1(L)$ und $L \in K_\alpha^1$ ist, erhält man unter Beachtung der Periodizität von t(s):

$$\varphi(t(s_2))-\varphi(t(s_1)) = \int_{s_1}^{s_2} \varphi'(t(\sigma)) \cdot \dot{t}(\sigma)\, d\sigma = -\int_{s_2}^{1+s_1} \varphi'(t(\sigma)) \cdot \dot{t}(\sigma)\, d\sigma .$$

Hierbei gibt entweder $|s_2 - s_1|$ oder $|1 + s_1 - s_2|$ die Länge σ_{12} des kurzen Bogens zwischen t_1 und t_2 auf L an.

Aus obiger Beziehung folgt:

$$|\varphi(t(s_2))-\varphi(t(s_1))| \leq \sigma_{12} \cdot \max|\varphi'(t)| \leq K \cdot |t_1-t_2| \cdot \max|\varphi'(t)|,$$

da $|\dot{t}(\sigma)| = 1$ ist und die Relation (7) gilt. Die Konstante K hängt nicht von $\varphi(t)$ ab.

Hieraus folgt unmittelbar:

$$\frac{|\varphi(t_2) - \varphi(t_1)|}{|t_2 - t_1|^\alpha} \leq K \cdot |t_1-t_2|^{1-\alpha} \cdot \max_{t\in L} \left|\frac{d\varphi(t)}{dt}\right|$$

und daraus die Behauptung.

Satz 3: Vor.: 1.) $o \leqslant i \leqslant m$, i fest

2.) $\varphi(t), \psi(t) \in H_a^m(L)$.

Beh.: 1.) $\varphi(t).\psi(t) \in H_a^m(L)$

2.) $H_a^i(\varphi\psi, L) \leqslant M \cdot H_a^i(\varphi, L)\, H_a^i(\psi, L)$, $M \geqslant 1$

wobei die Konstante M nicht von $\varphi(t)$, $\psi(t)$ abhängt.

Beweis: 1.) $(\varphi(t)\psi(t))^{(k)} = \sum_{\lambda=o}^{k} \binom{k}{\lambda} \varphi^{(k-\lambda)}(t)\, \psi^{(\lambda)}(t)$,

$(k = o,1,\ldots, m)$.

Jeder Summand existiert, ist stetig und genügt einer Hölderbedingung mit Index a. Somit gilt das gleiche für die Summe.

2.) Für i = o ist der Nachweis von Behauptung 2.) trivial; es genügt daher, den Beweis für $i > o$ durchzuführen.

$$3.)\quad H_\alpha^i(\varphi\psi, L) = \sum_{k=o}^{i} \max_{t\in L} \left|(\varphi(t)\psi(t))^{(k)}\right| + \sup_{t_1, t_2 \in L} \frac{\left|(\varphi\psi)^{(i)}(t_1) - (\varphi\psi)^{(i)}(t_2)\right|}{|t_1 - t_2|^\alpha}$$

$$= \sum_{k=o}^{i} \max_{t\in L} \left|\sum_{\lambda=o}^{k} \binom{k}{\lambda} \varphi^{(k-\lambda)}(t)\, \psi^{(\lambda)}(t)\right| +$$

$$+ \sup_{t_1, t_2 \in L} \frac{\left|\sum_{\lambda=o}^{i} \binom{i}{\lambda} \varphi^{(i-\lambda)}(t_1)\, \psi^{(\lambda)}(t_1) - \sum_{\lambda=o}^{i} \binom{i}{\lambda} \varphi^{(i-\lambda)}(t_2)\, \psi^{(\lambda)}(t_2)\right|}{|t_1 - t_2|^\alpha}$$

$$\leq \sum_{k=0}^{i} \sum_{\lambda=0}^{k} \binom{k}{\lambda} \max_{t\in L} |\varphi^{(k-\lambda)}(t)| \cdot \max_{t\in L} |\psi^{(\lambda)}(t)|$$

$$+ \sum_{\lambda=0}^{i} \binom{i}{\lambda} \sup_{t_1,t_2\in L} \frac{|\varphi^{(i-\lambda)}(t_1)\psi^{(\lambda)}(t_1) - \varphi^{(i-\lambda)}(t_1)\psi^{(\lambda)}(t_2)|}{|t_1-t_2|^{\alpha}}$$

$$+ \sum_{\lambda=0}^{i} \binom{i}{\lambda} \sup_{t_1,t_2\in L} \frac{|\varphi^{(i-\lambda)}(t_1)\psi^{(\lambda)}(t_2) - \varphi^{(i-\lambda)}(t_2)\psi^{(\lambda)}(t_2)|}{|t_1-t_2|^{\alpha}}$$

$$\leq \sum_{k=0}^{i} \sum_{\lambda=0}^{k} \binom{k}{\lambda} \max_{t\in L} |\varphi^{(k-\lambda)}(t)| \max_{t\in L} |\psi^{(\lambda)}(t)|$$

$$+ \sum_{\lambda=0}^{i} \binom{i}{\lambda} \max_{t\in L} |\varphi^{(i-\lambda)}(t)| \cdot \sup_{t_1,t_2\in L} \frac{|\psi^{(\lambda)}(t_1) - \psi^{(\lambda)}(t_2)|}{|t_1-t_2|^{\alpha}}$$

$$+ \sum_{\lambda=0}^{i} \binom{i}{\lambda} \max_{t\in L} |\psi^{(\lambda)}(t)| \cdot \sup_{t_1,t_2\in L} \frac{|\varphi^{(i-\lambda)}(t_1) - \varphi^{(i-\lambda)}(t_2)|}{|t_1-t_2|^{\alpha}}$$

Da $L \in K_{\alpha}^{1}$ und $\varphi^{(k)}(t)$, $\psi^{(k)}(t) \in H_{\alpha}^{1}(L)$ für $k=0,1,\ldots,i-1$ ist, gilt nach Hilfssatz 1:

$$\sup_{t_1,t_2\in L} \frac{|\varphi^{(k)}(t_1) - \varphi^{(k)}(t_2)|}{|t_1-t_2|^{\alpha}} \leq C_k \max_{t\in L} |\varphi^{(k+1)}(t)| \quad , \quad k=0,1,\ldots,i-1$$

$$\sup_{t_1,t_2\in L} \frac{|\psi^{(k)}(t_1) - \psi^{(k)}(t_2)|}{|t_1-t_2|^{\alpha}} \leq d_k \max_{t\in L} |\psi^{(k+1)}(t)| \quad , \quad k=0,1,\ldots,i-1$$

wobei C_k, $d_k \geq 1$ gewisse Konstanten sind, die nicht von $\varphi(t)$, $\psi(t)$ abhängen.

Es sei : $K_1 = \max (C_1, \ldots, C_{i-1}, d_1, \ldots, d_{i-1})$

$K_2 = \max \left(\binom{i}{0}, \binom{i}{1}, \ldots, \binom{i}{i} \right)$

$M_2 = K_1 \cdot K_2$.

Hiermit erhalt man:

$$H_2^i(\varphi\psi, L) \leq K_2 \cdot \sum_{k=0}^{i} \sum_{\lambda=0}^{k} \max_{t\in L} |\varphi^{(k-\lambda)}(t)| \cdot \max_{t\in L} |\psi^{(\lambda)}(t)|$$

$$+ M_2 \sum_{\lambda=0}^{i-1} \max_{t\in L} |\varphi^{(i-\lambda)}(t)| \max_{t\in L} |\psi^{(\lambda+1)}(t)|$$

$$+ \max_{t\in L} |\varphi(t)| \sup_{t_1,t_2\in L} \frac{|\psi^{(i)}(t_1) - \psi^{(i)}(t_2)|}{|t_1 - t_2|^{\alpha}}$$

$$+ M_2 \cdot \sum_{\lambda=1}^{i} \max_{t\in L} |\psi^{(\lambda)}(t)| \max_{t\in L} |\varphi^{(i-\lambda+1)}(t)|$$

$$+ \max_{t\in L} |\psi(t)| \sup_{t_1,t_2\in L} \frac{|\varphi^{(i)}(t_1) - \varphi^{(i)}(t_2)|}{|t_1 - t_2|^{\alpha}}$$

$$\leq M \cdot \Big(\sum_{k=0}^{i} \sum_{\lambda=0}^{i} \max_{t \in L} |\varphi^{(k)}(t)| \max_{t \in L} |\psi^{(k)}(t)|$$

$$+ \max_{t \in L} |\varphi(t)| \sup_{t_1, t_2 \in L} \frac{|\psi^{(i)}(t_1) - \psi^{(i)}(t_2)|}{|t_1 - t_2|^{\alpha}}$$

$$+ \max_{t \in L} |\psi(t)| \sup_{t_1, t_2 \in L} \frac{|\varphi^{(i)}(t_1) - \varphi^{(i)}(t_2)|}{|t_1 - t_2|^{\alpha}} \Big)$$

$$\leq M \cdot \Big(\sum_{k=0}^{i} \max_{t \in L} |\varphi^{(k)}(t)| \cdot \sum_{\lambda=0}^{i} \max_{t \in L} |\psi^{(\lambda)}(t)|$$

$$+ \sum_{k=0}^{i} \max_{t \in L} |\varphi^{(k)}(t)| \cdot \sup_{t_1, t_2 \in L} \frac{|\psi^{(i)}(t_1) - \psi^{(i)}(t_2)|}{|t_1 - t_2|^{\alpha}}$$

$$+ \sum_{k=0}^{i} \max_{t \in L} |\psi^{(k)}(t)| \cdot \sup_{t_1, t_2 \in L} \frac{|\varphi^{(i)}(t_1) - \varphi^{(i)}(t_2)|}{|t_1 - t_2|^{\alpha}}$$

$$+ \sup_{t_1, t_2 \in L} \frac{|\varphi^{(i)}(t_1) - \varphi^{(i)}(t_2)|}{|t_1 - t_2|^{\alpha}} \cdot \sup_{t_1, t_2 \in L} \frac{|\psi^{(i)}(t_1) - \psi^{(i)}(t_2)|}{|t_1 - t_2|^{\alpha}} \Big)$$

$$= M \cdot H_{\alpha}^{i}(\varphi, L) \cdot H_{\alpha}^{i}(\psi, L).$$

Die Konstante ist zunächst von i abhängig. Wählt man das Maximum dieser Konstanten für $o \leq i \leq m$, so ergibt sich eine von i unabhängige Konstante. M sei die so gewählte Konstante.

Satz 4 : Der Raum $H_d^m(L)_m$, d.h. $H_d^m(L)$ mit der Norm $H_d^m(\varphi, L)$ ist ein Banachraum.

Beweis : $\{\varphi_\nu(t)\}$ sei eine Cauchy-Folge in $H_d^m(L)_m$.

$\curvearrowright$ $H_d^m(\varphi_{n+p} - \varphi_n, L) \leq \varepsilon_n$, wobei ε_n unabhängig von p und $\lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = o$ ist.

Ausgeschrieben, heisst dies :

$$\sum_{k=o}^{m} \max_{t\in L} |\varphi_{n+p}^{(k)}(t) - \varphi_n^{(k)}(t)| +$$

$$+ \sup_{t_1,t_2\in L} \frac{|\varphi_{n+p}^{(m)}(t_1) - \varphi_{n+p}^{(m)}(t_2) + \varphi_n^{(m)}(t_2) - \varphi_n^{(m)}(t_1)|}{|t_1 - t_2|^\alpha} \leq \varepsilon_n .$$

Hieraus folgt: 1.) $\max_{t\in L} |\varphi_{n+p}^{(k)}(t) - \varphi_n^{(k)}(t)| \leq \varepsilon_n$, $(k = o,1,\ldots,m)$

2.) $\sup_{t_1,t_2\in L} \frac{|\varphi_{n+p}^{(m)}(t_1) - \varphi_{n+p}^{(m)}(t_2) + \varphi_n^{(m)}(t_1) - \varphi_n^{(m)}(t_2)|}{|t_1 - t_2|^\alpha} \leq \varepsilon_n .$

Aus 1.) folgt: $\max_{t \in L} \left| \varphi_{n+p}(t) - \varphi_n(t) \right| \leq \varepsilon_n .$ (*)

$\curvearrowright$ $\varphi_n(t) \Longrightarrow \varphi_{(o)}(t)$, wobei $\varphi_{(o)}(t)$ auf L stetig ist, da $\{ \varphi_n(t) \}$ eine Cauchy-Folge im Raum der auf L stetigen Funktionen ist, der bezüglich der Maximum-Norm vollständig ist.

Es ist noch zu zeigen, dass $\varphi_{(o)}(t) \in H_d^m(L)$ ist und dass $\lim_{n \to \infty} H_d^m(\varphi_n - \varphi_{(o)}, L) = o$ ist.

Aus 1.) folgt: $\varphi_n^{(k)}(t) \Longrightarrow \varphi_{(k)}(t)$, $(k = o, 1, \ldots, m)$, wobei die $\varphi_{(k)}(t)$ stetige Funktionen auf L sind, da die $\{ \varphi_n^{(k)}(t) \}$ Cauchy-Folgen im Raum der stetigen Funktionen sind, der bezüglich der Maximum-Norm vollständig ist.

Nach bekannten Sätzen aus der Analysis folgt:

$$\varphi_{(1)}(t) = \varphi'_{(o)}(t)$$

$$\varphi_{(2)}(t) = \varphi'_{(1)}(t) = \varphi''_{(o)}(t)$$

$$\vdots$$

$$\varphi_{(m)}(t) = \varphi'_{(m-1)}(t) = \varphi^{(m)}_{(o)}(t).$$

Hieraus folgt : $\varphi_{(o)}(t)$ ist in L m-mal stetig nach t differenzierbar. (**)

Nach 2.) gilt:

$$\sup_{t_1,t_2\in L}\left|\frac{\varphi_{n+p}^{(m)}(t_1)-\varphi_{n+p}^{(m)}(t_2)}{|t_1-t_2|^{\alpha}}-\frac{\varphi_n^{(m)}(t_1)-\varphi_n^{(m)}(t_2)}{|t_1-t_2|^{\alpha}}\right|\leq\varepsilon_n, \qquad (***)$$

wobei ε_n von p unabhängig ist. Lässt man $p\longrightarrow\infty$ streben und hält n fest, so sieht man, dass

$$\sup_{t_1,t_2\in L}\frac{|\varphi_{(o)}^{(m)}(t_1)-\varphi_{(o)}^{(m)}(t_2)|}{|t_1-t_2|^{\alpha}}$$

beschränkt ist, d.h. $\varphi_{(o)}^{(m)}(t)$ genügt auf L einer Hölderbedingung mit Index α.

Mit (**) folgt, dass $\varphi_{(o)}(t)\in H_{\alpha}^{m}(L)$ ist.

Es ist noch zu zeigen, dass $H_{\alpha}^{m}(\varphi_n-\varphi_{(o)},L)$ mit wachsendem n gegen Null konvergiert.

$$H_{\alpha}^{m}(\varphi_n-\varphi_{(o)},L)=\sum_{k=o}^{m}\max_{t\in L}|\varphi_n^{(k)}(t)-\varphi_{(o)}^{(k)}(t)|$$

$$+\sup_{t_1,t_2\in L}\frac{|\varphi_n^{(m)}(t_1)-\varphi_{(o)}^{(m)}(t_1)-\varphi_n^{(m)}(t_2)+\varphi_{(o)}^{(m)}(t_2)|}{|t_1-t_2|^{\alpha}}$$

$$= \sum_{k=0}^{m} \max_{t \in L} \left| \varphi_n^{(k)}(t) - \varphi_{(k)}(t) \right|$$

$$+ \sup_{t_1, t_2 \in L} \left| \frac{\varphi_{(o)}^{(m)}(t_1) - \varphi_{(o)}^{(m)}(t_2)}{|t_1 - t_2|^{\alpha}} - \frac{\varphi_n^{(m)}(t_1) - \varphi_n^{(m)}(t_2)}{|t_1 - t_2|^{\alpha}} \right|$$

$$\leq (m+1)\varepsilon_n + \varepsilon_n \qquad \text{nach 1.) und (***).}$$

Zusammenfassend kann man also sagen:

Bemerkung 3: 1.) $H_{\alpha}^{m}(L)$ ist ein linearer Raum und es gilt:

$$H_{\alpha}^{k}(L) \subseteq H_{\alpha}^{m}(L) \text{ , falls } k \geq m \text{ ist.}$$

2.) Für jedes feste i mit $o \leq i \leq m$ kann man durch $\overset{i}{H}_{\alpha}(\varphi, L)$ in $H_{\alpha}^{m}(L)$ eine Norm einführen, wodurch $H_{\alpha}^{m}(L)$ zu einem linearen normierten Raum $H_{\alpha}^{m}(L)_i$ wird. $H_{\alpha}^{m}(L)_m$ ist ein Banachraum.

3.) Es gilt offensichtlich für $k \geq m$:

$$H_{\alpha}^{k}(L)_i \subseteq H_{\alpha}^{m}(L)_i$$

für festes i mit $o \leq i \leq m$.

§ 3. Die Cauchy-Transformation, angewendet auf Funktionen aus $H^0_\alpha(L)$.

Betrachten wir den Ausdruck $\psi(t) = \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t} d\tau$,

wobei $\varphi(t) \in H^0_\alpha(L)$, $L \in K^1$ vorausgesetzt ist und das Integral im Sinne des Cauchyschen Hauptwertes zu verstehen ist, so gilt nach MUSKHELISHVILI (6), § 19, dass auch $\psi(t) \in H^0_\alpha(L)$ ist.

Da wir nur geschlossene Kurven zulassen, kann $\psi(t)$ in folgender Form dargestellt werden:

(vgl. MUSKHELISHVILI (6), Seite 28, Formel (12.5))

$$\Psi(t) = \varphi(t) + \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{\varphi(\tau) - \varphi(t)}{\tau - t} d\tau \quad ,$$

wobei das Integral als gewöhnliches uneigentliches Integral existiert.

Bemerkung 4: Zur Berechnung des Cauchyschen Hauptwertes von $\frac{1}{\pi i} \int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t} d\tau$ geht man folgendermassen vor:

um t als Mittelpunkt lege man einen Kreis mit so klein gewähltem Radius ε, dass dieser Kreis die Kurve L in genau zwei Punkten t_1, t_2 schneidet. Sodann betrachte man das Integral

$$\frac{1}{\pi i} \int_{L-\gamma} \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t} d\tau \quad ,$$

wobei γ den Bogen mit t_1 und t_2 als Endpunkten, der t enthält bedeutet und bilde:

$$\lim_{\varepsilon \to o} \frac{1}{\pi i} \int_{L-\gamma} \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t} d\tau \underset{\text{Def.}}{=} \frac{1}{\pi i} \int_{L} \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t} d\tau .$$

Für die Existenz des Grenzwertes ist es nicht notwendig, t_1 und t_2 so zu wählen, wie oben angegeben, d.h. $|t_1 - t| = |t_2 - t|$ sondern es genügt zu fordern, dass

$$\frac{|t_1 - t|}{|t_2 - t|} \xrightarrow[\varepsilon \to o]{} 1 \qquad (*)$$

gilt. Ist diese Konvergenz gleichmässig bezüglich t, so konvergiert auch $\frac{1}{\pi i} \int_{L-\gamma} \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t} d\tau$ gleichmässig bezüglich t gegen den Hauptwert $\frac{1}{\pi i} \int_{L} \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t} d\tau$. Dies ist insbesondere der Fall, wenn $|t_1 - t| = |t_2 - t|$, oder wenn t_1 t , t_2 t Bogen gleicher Länge sind. (vgl. MUSKHELISHVILI (6), Seite 26-3o).

Definition 7: Durch folgende Gleichung definieren wir die "Cauchy-Transformation S" für Funktionen $\varphi(t) \in H^o_\alpha(L)$:

$$(S\varphi)(t) = \frac{1}{\pi i} \int_{L} \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t} d\tau = \psi(t),$$

wobei das Integral im Sinne des Cauchyschen Hauptwertes zu verstehen ist.

Bemerkung 5: Nach dem vorher gesagten ist klar, dass der Operator S den Raum $H^o_\alpha(L)$ in sich abbildet.

Bemerkung 6: Bei Anwendung eines Operators auf eine Funktion lassen wir im folgenden entweder das Argument weg, wenn keine Verwechslung auftreten kann, oder wir schreiben dasjenige Argument, das zur Bildfunktion gehört, also z.B. entweder $S\varphi$ oder $S\varphi(t)$.

Hilfssatz 2: Vor.: $k(t), \varphi(t) \in H^1_\alpha(L)$.

Beh.: $$\frac{d}{dt}\int_L \frac{k(\tau)-k(t)}{\tau-t}\varphi(\tau)\,d\tau = \int_L \frac{k'(\tau)-k'(t)}{\tau-t}\varphi(\tau)\,d\tau + \int_L \frac{k(\tau)-k(t)}{\tau-t}\varphi'(\tau)\,d\tau$$

Beweis: Sei $$\psi(t) = \int_L \frac{k(\tau)-k(t)}{\tau-t}\varphi(\tau)\,d\tau .$$

Aus L schneide man auf jeder Seite von t einen Bogen gleicher, genügend kleiner Länge ε, $t'\,t$ und $t''t$ heraus und bezeichne den Bogen $t'\,t''$, der t enthält mit γ_ε.

Nun betrachte man:

$$\psi_\varepsilon(t) = \int_{L-\gamma_\varepsilon} \frac{k(\tau)-k(t)}{\tau-t}\varphi(\tau)\,d\tau .$$

Mit der Bogenlänge s als Parameter ergibt sich :

$$\psi_\varepsilon(t(s)) = \int_0^{s-\varepsilon} \frac{k(t(\sigma))-k(t(s))}{t(\sigma)-t(s)}\varphi(t(\sigma))\,\dot{t}(\sigma)\,d\sigma +$$

$$+ \int_{s+\varepsilon}^{1} \frac{k\,(t(\sigma)) - k\,(t(s))}{t\,(\sigma) - t\,(s)}\, \varphi\,(t(\sigma))\dot{t}\,(\sigma)\,d\sigma\,.$$

Wir betrachten den ersten Summanden :

$$\psi_{\varepsilon}^{1}\,(t(s)) = \int_{o}^{s-\varepsilon} \frac{k(t(\sigma) - k(t(s))}{t\,(\sigma) - t\,(s)}\, \varphi\,(t(\sigma))\dot{t}\,(\sigma)\,d\sigma\,.$$

Durch geeignete Verschiebung des "Unstetigkeitspunktes der Bogenkoordinate", d.h. desjenigen Punktes $t_o \in L$, der der Bogenlänge $s = o$ entspricht, kann man stets erreichen, dass die Bogenlänge s, die dem betrachteten Punkte $t = t\,(s)$ in $\psi_{\varepsilon}^{1}\,(t(s))$ entspricht, folgender Bedingung genügt:

$$s \in [\delta\,,\ 1 - \delta\,]\ ,\quad o < \delta < \frac{1}{4}\,.$$

Für $Z(\sigma,s) = \dfrac{k\,(t(\sigma)) - k\,(t(s))}{t\,(\sigma) - t\,(s)}\, \varphi\,(t(\sigma))\ \dot{t}\,(\sigma)$ gilt:

a.) In $G = \left\{ (\sigma\,,\ s) \mid s \in [\delta\,,\ 1 - \delta\,]\ ,\ \sigma \in [o,\ s - \varepsilon\,] \text{ mit } \varepsilon < \frac{\delta}{2} \right\}$

ist $Z(\sigma\,,\ s)$ stetig.

b.) In $\mathcal{G} = \left\{ (\sigma,\ s) \mid s \in [\frac{\delta}{2},\ 1 - \frac{\delta}{2}\,], \sigma \in [-\frac{\delta}{4},\ s - \frac{\varepsilon}{2}] \text{ mit } \varepsilon < \frac{\delta}{2} \right\} \supset G$

existiert

$$Z_s\,(\sigma,s) = \frac{[k(t(\sigma)) - k(t(s))] - k'(t(s))(t(\sigma) - t(s))}{(t(\sigma) - t\,(s))^2}\, \varphi(t(\sigma))\dot{t}(\sigma)\dot{t}(s$$

und ist dort stetig (vgl. Bem. 1).

Damit folgt nach einem bekannten Satz:

$\dot{\psi}_\varepsilon^1 (t(s))$ existiert in $[\delta, 1-\delta]$ und es gilt:

$$\dot{\psi}_\varepsilon^1 (t(s)) = \int_0^{s-\varepsilon} Z_s (\sigma, s)\, d\sigma + Z(s-\varepsilon, s).$$

Analoge Überlegungen zeigen, dass auch

$$\dot{\psi}_\varepsilon^{(2)}(t(s)) = \frac{d}{ds}\int_{s+\varepsilon}^{1} \frac{k(t(\sigma)) - k(t(s))}{t(\sigma) - t(s)} \varphi(t(\sigma))\dot{t}(\sigma)\, d\sigma \text{ in } [\delta, 1-\delta]$$

existiert und dass gilt:

$$\dot{\psi}_\varepsilon^{(2)}(t(s)) = \int_{s+\varepsilon}^{1} Z_s (\sigma, s)\, d\sigma - Z(s+\varepsilon, s).$$

Für $s \in [\delta, 1-\delta]$ existiert also $\frac{d\psi_\varepsilon}{ds}$ und es gilt:

$$\frac{d\psi_\varepsilon}{ds} = \int_0^{s-\varepsilon} Z_s(\sigma, s)\, d\sigma + Z(s-\varepsilon, s) + \int_{s+\varepsilon}^{1} Z_s (\sigma, s)\, d\sigma - Z(s+\varepsilon, s).$$

Durch Einsetzen und partielle Integration erhält man:

$$\frac{d\psi_\varepsilon}{ds} = \frac{k(t(s-\varepsilon)) - k(t(s))}{t(s-\varepsilon) - t(s)} \varphi(t(s-\varepsilon))\dot{t}(s-\varepsilon) -$$

$$- \frac{k(t(s+\varepsilon)) - k(t(s))}{t(s+\varepsilon) - t(s)} \varphi(t(s+\varepsilon))\dot{t}(s+\varepsilon)$$

$$+ \frac{k(t(o)) - k(t(s))}{t(o) - t(s)} \varphi(t(o))\dot{t}(s)$$

$$- \frac{k(t(1)) - k(t(s))}{t(1) - t(s)} \varphi(t(1))\dot{t}(s)$$

$$- \frac{k(t(s-\varepsilon)) - k(t(s))}{t(s-\varepsilon) - t(s)} \varphi(t(s-\varepsilon))\dot{t}(s)$$

$$+ \frac{k(t(s+\varepsilon)) - k(t(s))}{t(s+\varepsilon) - t(s)} \varphi(t(s+\varepsilon))\dot{t}(s)$$

$$+ \dot{t}(s) \int_0^{s-\varepsilon} \frac{k'(t(\rho)) - k'(t(s))}{t(\rho) - t(s)} \varphi(t(\rho))\dot{t}(\rho)\, d\rho$$

$$+ \dot{t}(s) \int_{s+\varepsilon}^{1} \frac{k'(t(\rho)) - k'(t(s))}{t(\rho) - t(s)} \varphi(t(\rho))\dot{t}(\rho)\, d\rho$$

$$+ \dot{t}(s) \int_0^{s-\varepsilon} \frac{k(t(\rho)) - k(t(s))}{t(\rho) - t(s)} \varphi'(t(\rho))\dot{t}(\rho)\, d\rho$$

$$+ \dot{t}(s) \int_{s+\varepsilon}^{1} \frac{k(t(\rho)) - k(t(s))}{t(\rho) - t(s)} \varphi'(t(\rho))\dot{t}(\rho)\, d\rho$$

Für $\psi_\varepsilon(s) \underset{\text{Def.}}{=} \psi_\varepsilon(t(s))$ gilt :

1.) $\psi_\varepsilon(s)$ ist definiert für $s \in [\delta, 1-\delta]$, $\varepsilon \in (0, \frac{\delta}{2})$.

2.) $\psi_\varepsilon(s)$ ist nach den vorhergehenden Überlegungen differenzierbar für $s \in [\delta, 1-\delta]$, $\varepsilon \in (0, \frac{\delta}{2})$ und die Ableitung ist dort stetig.

3.) $$\lim_{\varepsilon \to 0} \psi_\varepsilon(s) = \int_0^1 \frac{k(t(\sigma)) - k(t(s))}{t(\sigma) - t(s)} \varphi(t(\sigma)) \dot{t}(\sigma) d\sigma = \phi_1(s),$$

wobei das Integral bekanntlich als Cauchysches Hauptwertintegral existiert und zwar für alle $s \in [\delta, 1-\delta]$.

4.) $$\lim_{\varepsilon \to 0} \dot{\psi}_\varepsilon(s) = \lim_{\varepsilon \to 0} \Bigg\{ \frac{k(t(s-\varepsilon)) - k(t(s))}{t(s-\varepsilon) - t(s)} \varphi(t(s-\varepsilon)) \left[\dot{t}(s-\varepsilon) - \dot{t}(s) \right]$$

$$+ \frac{k(t(s+\varepsilon)) - k(t(s))}{t(s+\varepsilon) - t(s)} \varphi(t(s+\varepsilon)) \left[\dot{t}(s) - \dot{t}(s+\varepsilon) \right]$$

$$+ \dot{t}(s) \int_0^{s-\varepsilon} \frac{k'(t(\sigma)) - k'(t(s))}{t(\sigma) - t(s)} \varphi(t(\sigma)) \dot{t}(\sigma) d\sigma$$

$$+ \dot{t}(s) \int_{s+\varepsilon}^1 \frac{k'(t(\sigma)) - k'(t(s))}{t(\sigma) - t(s)} \varphi(t(\sigma)) \dot{t}(\sigma) d\sigma$$

$$+ \dot{t}(s) \int_0^{s-\varepsilon} \frac{k(t(\sigma)) - k(t(s))}{t(\sigma) - t(s)} \varphi'(t(\sigma))\dot{t}(\sigma)\, d\sigma$$

$$+ \dot{t}(s) \int_{s+\varepsilon}^{1} \frac{k(t(\sigma)) - k(t(s))}{t(\sigma) - t(s)} \varphi'(t(\sigma))\dot{t}(\sigma)\, d\sigma$$

Der Grenzwert existiert gleichmässig für $s \in [\delta, 1-\delta]$, da $k(t), \varphi(t) \in H_\alpha^1(L)$ und $L \in K_\alpha^1$ ist (vgl. Bemerkung 4).

Nach bekannten Sätzen gilt daher:

1.) $$\lim_{\varepsilon \to 0} \psi_\varepsilon(s) = \phi_1(s) = \int_0^1 \frac{k(t(\sigma)) - k(t(s))}{t(\sigma) - t(s)} \varphi(t(\sigma))\dot{t}(\sigma)\, d\sigma .$$

Der Grenzwert existiert gleichmässig bezüglich $s \in [\delta, 1-\delta]$

2.) $\phi_1(s)$ ist differenzierbar für $s \in [\delta, 1-\delta]$, d.h.

$$\frac{d}{ds} \int_0^1 \frac{k(t(\sigma)) - k(t(s))}{t(\sigma) - t(s)} \varphi(t(\sigma))\, \dot{t}(\sigma)\, d\sigma$$

existiert in $[\delta, 1-\delta]$.

3.) $\dot{\phi}_1(s) = \lim_{\varepsilon \to 0} \dot{\psi}_\varepsilon(s)$ für $s \in [\delta, 1-\delta]$.

Es gilt also:

$$\frac{d}{ds} \int_0^1 \frac{k(t(\sigma)) - k(t(s))}{t(\sigma) - t(s)} \varphi(t(\sigma))\dot{t}(\sigma)\,d\sigma = \lim_{\varepsilon \to 0} \dot{\psi}_\varepsilon(s)$$

$$= \dot{t}(s) \int_0^1 \frac{k'(t(\sigma)) - k'(t(s))}{t(\sigma) - t(s)} \varphi(t(\sigma))\dot{t}(\sigma)\,d\sigma$$

$$+ \dot{t}(s) \int_0^1 \frac{k(t(\sigma)) - k(t(s))}{t(\sigma) - t(s)} \varphi'(t(\sigma))\dot{t}(\sigma)\,d\sigma.$$

Mit Hilfe von :

$$\frac{d}{dt} \int_L \frac{k(\tau) - k(t)}{\tau - t} \varphi(\tau)\,d\tau = \overline{\dot{t}(s)} \frac{d}{ds} \int_0^1 \frac{k(t(\sigma)) - k(t(s))}{t(\sigma) - t(s)} \varphi(t(\sigma))\dot{t}(\sigma$$

erhält man hieraus für $t = t(s)$, $s \in [\delta, 1-\delta]$:

$$\frac{d}{dt} \int_L \frac{k(\tau) - k(t)}{\tau - t} \varphi(\tau)\,d\tau = \int_L \frac{k'(\tau) - k'(t)}{\tau - t} \varphi(\tau)\,d\tau$$

$$+ \int_L \frac{k(\tau) - k(t)}{\tau - t} \varphi'(\tau)\,d\tau.$$

Da die Differenzierbarkeit eine lokale Eigenschaft ist, gilt die Formel allgemein für $t \in L$, denn eine Verschiebung des Unstetigkeitspunktes der Bogenkoordinate auf L liefert die gleich Formel für alle $t \in L$.

Satz 5: Vor.: $\varphi(t) \in H^m_\alpha(L)$.

$$\text{Beh.:} \frac{d^m}{dt^m} \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t} d\tau = \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{\varphi^{(m)}(\tau)}{\tau - t} d\tau$$

Beweis: a.) Für m = 1. Es ist zu zeigen:

$$\frac{d}{dt} \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t} d\tau = \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{\varphi'(\tau)}{\tau - t} d\tau .$$

$$\text{Da } S\varphi = \varphi(t) + \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{\varphi(\tau) - \varphi(t)}{\tau - t} d\tau$$

$$\text{und } S\varphi' = \varphi'(t) + \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{\varphi'(\tau) - \varphi'(t)}{\tau - t} d\tau$$

ist, genügt es, die folgende Beziehung zu zeigen:

$$\frac{d}{dt} \int_L \frac{\varphi(\tau) - \varphi(t)}{\tau - t} d\tau = \int_L \frac{\varphi'(\tau) - \varphi'(t)}{\tau - t} d\tau .$$

Dies folgt aber unmittelbar nach Hilfssatz 2.

b.) Da nach Voraussetzung $\varphi(t) \in H_\alpha^m(L)$ ist, kann die Überlegung unter a.) m-mal iterativ angewendet werden und man erhält die Behauptung.

Folgerung 1 : Der Operator S bildet den Raum $H_\alpha^m(L)$ in sich ab.

Satz 6 : Vor.: $\varphi(t) \in H_\alpha^m(L)$.

Beh.: $H_\alpha^m(S\varphi, L) \leq K \cdot H_\alpha^m(\varphi, L)$,

wobei die Konstante K nicht von $\varphi(t)$ abhängt.

Beweis: I.) Für m = o.

$$S\varphi = \varphi(t) + \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{\varphi(\tau) - \varphi(t)}{\tau - t} d\tau = \varphi(t) + \psi(t).$$

1.) Beachtet man, dass für $\varphi(t) \in H_\alpha^o(L)$ gilt:

$$|\varphi(t_1) - \varphi(t_2)| \leq \sup_{\tau_1, \tau_2 \in L} \frac{|\varphi(\tau_1) - \varphi(\tau_2)|}{|\tau_1 - \tau_2|^\alpha} \cdot |t_1 - t_2|^\alpha ; \; t_1, t_2 \in L,$$

wobei $\sup_{\tau_1, \tau_2 \in L} \frac{|\varphi(\tau_1) - \varphi(\tau_2)|}{|\tau_1 - \tau_2|^\alpha}$ die günstigste Hölderkonstante

ist, so erhält man aus den Überlegungen von MUSKHELISHVILI (6), § 19 unmittelbar:

*) $$|\psi(t_1) - \psi(t_2)| \leq M \sup_{\tau_1, \tau_2 \in L} \frac{|\varphi(\tau_1) - \varphi(\tau_2)|}{|\tau_1 - \tau_2|^\alpha} |t_1 - t_2|^\alpha ; \quad t_1, t_2 \in L,$$

wobei die Konstante M nicht von $\varphi(t)$ abhängt.

) $$|\psi(t)| = \left| \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{\varphi(\tau) - \varphi(t)}{\tau - t} d\tau \right| \leq \int_L \frac{|\varphi(\tau) - \varphi(t)|}{|\tau - t|} d\sigma \leq$$

$$\leq \sup_{\tau_1, \tau_2 \in L} \frac{|\varphi(\tau_1) - \varphi(\tau_2)|}{|\tau_1 - \tau_2|^\alpha} \cdot \int_L \frac{d\sigma}{|\tau - t|^{1-\alpha}}$$

Hieraus folgt:

**) $$\max_{t \in L} |\psi(t)| \leq M_1 \sup_{\tau_1, \tau_2 \in L} \frac{|\varphi(\tau_1) - \varphi(\tau_2)|}{|\tau_1 - \tau_2|^\alpha}$$, wobei die

Konstante M_1 von $\varphi(t)$ unabhängig ist.

Betrachte : $$\max_{t \in L} |S\varphi(t)| + \sup_{t_1, t_2 \in L} \frac{|S\varphi(t_1) - S\varphi(t_2)|}{|t_1 - t_2|^\alpha} =$$

$$= \max_{t \in L} |\varphi(t) + \psi(t)| + \sup_{t_1, t_2 \in L} \frac{|\varphi(t_1) + \psi(t_1) - \varphi(t_2) - \psi(t_2)|}{|t_1 - t_2|^\alpha}$$

$$\max_{t \in L} |\varphi(t)| + \max_{t \in L} |\psi(t)| + \sup_{t_1, t_2 \in L} \frac{|\varphi(t_1) - \varphi(t_2)|}{|t_1 - t_2|^\alpha} + \sup_{t_1, t_2 \in L} \frac{|\psi(t_1) - \psi(t_2)}{|t_1 - t_2|^\alpha}$$

$$\leq \max_{t\in L} |\varphi(t)| + (M_1 + 1 + M) \sup_{t_1, t_2 \in L} \frac{|\varphi(t_1) - \varphi(t_2)|}{|t_1 - t_2|^{\alpha}} \quad \text{nach } (*) \text{ und } (**)$$

Somit gilt also:

$$\max_{t\in L} |S\varphi(t)| + \sup_{t_1, t_2 \in L} \frac{|S\varphi(t_1) - S\varphi(t_2)|}{|t_1 - t_2|^{\alpha}} \leq$$

$$\leq K \cdot \left(\max_{t\in L} |\varphi(t)| + \sup_{t_1, t_2 \in L} \frac{|\varphi(t_1) - \varphi(t_2)|}{|t_1 - t_2|^{\alpha}} \right), \text{ wobei die}$$

Konstante K nicht von $\varphi(t)$ abhängt.

II.) Sei $\varphi(t) \in H_{\alpha}^{m}(L)$. Es ist zu zeigen:

$$\sum_{k=0}^{m} \max_{t\in L} |(S\varphi)^{(k)}(t)| + \sup_{t_1, t_2 \in L} \frac{|(S\varphi)^{(m)}(t_1) - (S\varphi)^{(m)}(t_2)|}{|t_1 - t_2|^{\alpha}}$$

$$\leq K \cdot \left(\sum_{k=0}^{m} \max_{t\in L} |\varphi^{(k)}(t)| + \sup_{t_1, t_2 \in L} \frac{|\varphi^{(m)}(t_1) - \varphi^{(m)}(t_2)|}{|t_1 - t_2|^{\alpha}} \right).$$

Nach Satz 5 gilt:

$$\sum_{k=o}^{m} \max_{t\in L} \left| (S\varphi)^{(k)}(t) \right| + \sup_{t_1, t_2 \in L} \frac{\left| (S\varphi)^{(m)}(t_1) - (S\varphi)^{(m)}(t_2) \right|}{\left| t_1 - t_2 \right|^{\alpha}} =$$

$$= \sum_{k=o}^{m} \max_{t\in L} \left| S\,\varphi^{(k)}(t) \right| + \sup_{t_1, t_2 \in L} \frac{\left| S\,\varphi^{(m)}(t_1) - S\,\varphi^{(m)}(t_2) \right|}{\left| t_1 - t_2 \right|^{\alpha}}$$

Nach I.) 3.) gilt:

$$\max_{t\in L} \left| S\,\varphi^{(m)}(t) \right| + \sup_{t_1, t_2, \in L} \frac{\left| S\,\varphi^{(m)}(t_1) - S\,\varphi^{(m)}(t_2) \right|}{\left| t_1 - t_2 \right|^{\alpha}}$$

(***)

$$\leq M \cdot \left(\max_{t\in L} \left| \varphi^{(m)}(t) \right| + \sup_{t_1, t_2 \in L} \frac{\left| \varphi^{(m)}(t_1) - \varphi^{(m)}(t_2) \right|}{\left| t_1 - t_2 \right|^{\alpha}} \right).$$

Es ist also noch $\sum_{k=o}^{m-1} \max_{t\in L} \left| S\,\varphi^{(k)}(t) \right|$ abzuschätzen.

Aus $S\,\varphi = \varphi(t) + \psi(t)$ folgt $S\,\varphi^{(k)} = \varphi^{(k)}(t) + \psi^{(k)}(t)$. ↷

(a): $\sum_{k=o}^{m-1} \max_{t\in L} \left| S\varphi^{(k)}(t) \right| \leq \sum_{k=o}^{m} \max_{t\in L} \left| \varphi^{(k)}(t) \right| + \sum_{k=o}^{m} \max_{t\in L} \left| \psi^{(k)}(t) \right|.$

Mit Hilfe von Hilfssatz 2 folgt analog zu I.) 2.):

$$(b):\quad \max_{t\in L}\left|\psi^{(k)}(t)\right| \leq \tilde{M}_1 \sup_{t_1,t_2\in L}\frac{\left|\varphi^{(k)}(t_1)-\varphi^{(k)}(t_2)\right|}{|t_1-t_2|^{\alpha}},\ (k=0,1\ldots$$

wobei die Konstante $\tilde{M}_1$ nicht von $\varphi(t)$ abhängt.

Nach Hilfssatz 1 gilt:

$$(c):\quad \sup_{t_1,t_2\in L}\frac{\left|\varphi^{(k)}(t_1)-\varphi^{(k)}(t_2)\right|}{|t_1-t_2|^{\alpha}} \leq M_2 \max_{t\in L}\left|\varphi^{(k+1)}(t)\right|,\ (k=0,1,\ldots,m$$

wobei die Konstante M_2 nicht von $\varphi(t)$ abhängt.

Die Konstanten in (b) und (c) sind zunächst von k abhängig.
$\tilde{M}_1$ und M_2 seien die Maxima dieser Konstanten für $k = 0,1,\ldots,m-1$.

(c) in (b) eingesetzt liefert:

$$\max_{t\in L}\left|\psi^{(k)}(t)\right| \leq M_3 \cdot \max_{t\in L}\left|\varphi^{(k+1)}(t)\right|,\ (k=0,1,\ldots,m-1).$$

Mit (a) erhält man hiermit:

$$\sum_{k=0}^{m-1}\max_{t\in L}\left|S\varphi^{(k)}(t)\right| \leq M_4 \sum_{k=0}^{m}\max_{t\in L}\left|\varphi^{(k)}(t)\right|.$$

Mit (***) folgt hieraus die Behauptung.

Satz 7 : Vor.: 1.) $\varphi(t) \in H_\alpha^1 (L)$

2.) $\phi(t,t_o) = \dfrac{\varphi(t) - \varphi(t_o)}{t - t_o}$; $t \neq t_o$; $t, t_o \in L$

3.) $\phi(t_o, t_o) = \lim\limits_{\substack{t \to t_o \\ t \in L}} \dfrac{\varphi(t) - \varphi(t_o)}{t - t_o}$, $t_o \in L$.

Beh.: $\phi(t, t_o)$ genügt auf L bezüglich t bei festem t_o und bezüglich t_o bei festem t einer Hölderbedingung mit Index α; die Hölderkonstante ist von t_o und t unabhängig.

Beweis: 1.) Wegen der Symmetrie von $\phi(t,t_o)$ genügt es zu zeigen, dass $\phi(t,t_o)$ bei festem t_o aus $H_\alpha^o (L)$ ist.

2.) Sei t_o fest, $t_o \in L$.

Aus L schneide man auf jeder Seite von t_o einen Bogen gleicher, fester Länge ε mit $o < \varepsilon < \frac{1}{4}$: $t_o\, t_o'$ und $t_o\, t_o''$ heraus und bezeichne den Bogen $t_o'\, t_o''$, der t_o enthält mit $\mathfrak{g}_\varepsilon$.

t_o' wahle man als Anfangspunkt zur Berechnung der Bogenlänge:

$$\mathfrak{g}_\varepsilon = \left\{ t = t(s) \text{ mit } o \leq s \leq 2\varepsilon < \frac{1}{2} \right\}.$$

$t_o = t(\varepsilon) = t(s_o)$. Sei $t_1 = t(s_1)$, $t_2 = t(s_2) \in \mathfrak{g}_\varepsilon$, $t_1 \neq t_2$.

Es gilt:

$$\varphi(t(s)) - \varphi(t(s_o)) = \int_{s_o}^{s} \varphi'(t(\sigma))\, \dot{t}\,(\sigma)\, d\sigma \quad \forall\ s \in [o, 2\varepsilon]$$

$$= (s - s_o) \int_{o}^{1} \varphi'(t(s_o + u\,[s - s_o]))\, \dot{t}(s_o + u\,[s - s_o])\, du.$$

Für $s_1,\ s_2 \in [o,\ 2\varepsilon]$ folgt hieraus:

$$\left| \frac{\varphi(t(s_1)) - \varphi(t(s_o))}{s_1 - s_o} - \frac{\varphi(t(s_2)) - \varphi(t(s_o))}{s_2 - s_o} \right| =$$

$$\left| \int_{o}^{1} \left\{ \varphi'(t(s_o + u\,[s_1 - s_o])\, \dot{t}\,(s_o + u\,[s_1 - s_o]) - \varphi'(t(s_o + u\,[s_2 - s_o])) \right. \right.$$

$$\left. \left. \cdot\, \dot{t}\,(s_o + u\,[s_2 - s_o]) \right\} \, du \right|$$

$$\leq M_1 \cdot \int_{o}^{1} \left| s_o + u\,(s_1 - s_o) - s_o - u\,(s_2 - s_o) \right|^{\alpha} du\ ,$$

da $\varphi'(t(s))\ ,\ \dot{t}(s) \in C_{\alpha}^{o}\ ([o, 2\varepsilon])$ ist.

$$\leq M_1 \left| s_1 - s_2 \right|^{\alpha} \int_0^1 u^{\alpha} \, du = M_2 \left| s_1 - s_2 \right|^{\alpha},$$

d.h. $\dfrac{\varphi(t(s)) - \varphi(t(s_o))}{s - s_o} \in C_{\alpha}^{o}$ ($[o, 2\varepsilon]$) bezüglich s, mit einer von s_o und $s \in [o, 2\varepsilon]$ unabhängigen Hölderkonstanten M_2.

Es gilt weiterhin:

$$(*) \quad \phi(t, t_o) = \frac{\varphi(t) - \varphi(t_o)}{t - t_o} = \frac{\varphi(t(s)) - \varphi(t(s_o))}{t(s) - t(s_o)}$$

$$= \frac{\varphi(t(s)) - \varphi(t(s_o))}{s - s_o} \cdot \frac{1}{\frac{t(s) - t(s_o)}{s - s_o}}$$

$$= \frac{\phi_1(s, s_o)}{\phi_2(s, s_o)}, \quad t \in \mathcal{J}_{\varepsilon}, \quad s \in [o, 2\varepsilon]$$

Nach oben gilt: $\phi_1(s, s_o) = \dfrac{\varphi(t(s)) - \varphi(t(s_o))}{s - s_o} \in C_{\alpha}^{o}$ ($[o, 2\varepsilon]$).

Da $L \in K_{\alpha}^{1}$ ist, folgt nach denselben Überlegungen:

$$\phi_2(s, s_o) = \frac{t(s) - t(s_o)}{s - s_o} \in C_{\alpha}^{o}([o, 2\varepsilon]) \text{ bezüglich s,}$$

mit einer von s_o und $s \in [o, 2\varepsilon]$ unabhängigen Konstanten M_3.

Da $L \in K^1_\alpha$ ist, muss $|\phi_2(s, s_o)| \geqslant d > o$ sein für $s \in [o, 2\varepsilon]$ denn $|\phi_2(s, s_o)|$ ist eine stetige Funktion für $s \in [o, 2\varepsilon]$ und nimmt daher ihr Minimum an, das nicht Null sein kann.

Hieraus folgt, dass $\dfrac{\phi_1(s, s_o)}{\phi_2(s, s_o)} \in C^o_\alpha([o, 2\varepsilon])$ ist bezüglich s mit einer Konstanten M_4, die von s_o und $s \in [o, 2\varepsilon]$ unabhängig ist.

Da $2\varepsilon < \frac{1}{2}$ ist, folgt mit (*):

$$|\phi(t_1, t_o) - \phi(t_2, t_o)| \leqslant M\,|t_1 - t_2|^\alpha \quad \forall\, t_1, t_2 \in \mathfrak{f}_\varepsilon\,,$$

wobei die Konstente M von t_o und $t_1, t_2 \in \mathfrak{f}$ unabhängig ist.

3.) Aus L schneide man auf jeder Seite von t_o einen Bogen gleicher, fester Länge $\frac{\varepsilon}{2}$ (dasselbe ε wie bei 2.)) : $t_o t_1'$ und $t_o t_1''$ heraus und bezeichne den Bogen $t_1'\, t_1''$, der t_o enthält mit $\mathfrak{f}_{\frac{\varepsilon}{2}}$.

Wie bei 2.) ergibt sich, dass

$|\phi(t_1, t_o) - \phi(t_2, t_o)| \leqslant K\,|t_1 - t_2|^\alpha \;\forall\, t_1, t_2 \in \mathfrak{f}_{\frac{\varepsilon}{2}}$ gilt, wobei die Konstante K von t_o und $t_1, t_2 \in \mathfrak{f}_{\frac{\varepsilon}{2}}$ unabhängig ist.

4.) Mit den Bezeichnungen von 3.) betrachte man nun den Bogen $t_1'\, t_1''$ einschliesslich der Punkte t_1' und t_1'' der den Punkt t_o nicht enthält und bezeichne ihn mit $\mathfrak{f}_1$.

Für $t_1, t_2 \in \gamma_1$ gilt:

(1) $|\varphi(t_1) - \varphi(t_o) - \varphi(t_2) + \varphi(t_o)| = |\varphi(t_1) - \varphi(t_2)| \leq C_1 |t_1 - t_2|^\alpha$

(2) $|t_1 - t_o - t_2 + t_o| = |t_1 - t_2| \leq C_2 |t_1 - t_2|^\alpha \quad \forall\, t_1, t_2 \in \gamma_1$,

wobei die Konstanten C_i von t_o und $t_1, t_2 \in \gamma_1$ unabhängig sind.

Weiterhin gilt: $|t - t_o| \geq d_1 > o \quad \forall\, t \in \gamma_1$, denn $|t - t_o|$ ist eine stetige Funktion über dem abgeschlossenen Kurvenbogen γ_1 und nimmt daher dort ihr Minimum an, das nicht Null sein kann, da $L \in K_\alpha^1$ ist.

Hieraus folgt mit (1) und (2), dass

$$|\phi(t_1, t_o) - \phi(t_2, t_o)| \leq C \cdot |t_1 - t_2|^\alpha \quad \forall\, t_1, t_2 \in \gamma_1$$

gilt, wobei die Konstante C von t_o und $t_1, t_2 \in \gamma_1$ unabhängig ist

5.) Wir betrachten den Bogen $t_o' \; t_o''$ einschliesslich der Punkte t_o' und t_o'', der den Punkt t_o nicht enthält und bezeichnen ihn mit γ_2.

Wie bei 4.) zeigt man, dass $\forall\, t_1, t_2 \in \gamma_2$ gilt:

$$|\phi(t_1, t_o) - \phi(t_2, t_o)| \leq \tilde{C} |t_1 - t_2|^\alpha \quad ,$$

wobei die Konstante $\tilde{C}$ von t_o und $t_1, t_2 \in \gamma_2$ unabhängig ist.

6.) Sei $t_1 \in \gamma_{\frac{\varepsilon}{2}}$, $t_2 \in \gamma_2 \cdot \gamma_{\frac{\varepsilon}{2}}$ und γ_2 sind zwei kompakte Punktmengen, die keinen Punkt gemeinsam haben, da $L \in K_\alpha^1$ ist. Hieraus folgt, dass $|t_1 - t_2| \geq d_1 > 0$ ist, für alle $t_1 \in \gamma_{\frac{\varepsilon}{2}}$, $t_2 \in \gamma_2$.

Wir betrachten:

$$|\phi(t_1, t_0) - \phi(t_2, t_0)| \leq |\phi(t_1, t_0) + \phi(t_2, t_0)|$$

$$\leq \left|\frac{\varphi(t_1) - \varphi(t_0)}{t_1 - t_0}\right| + \left|\frac{\varphi(t_2) - \varphi(t_0)}{t_2 - t_0}\right|$$

$$\leq D_1 \cdot \max_{t \in L} |\varphi'(t)| + D_2 \max_{t \in L} |\varphi(t)| \leq$$

$$\forall\, t_1 \in \gamma_{\frac{\varepsilon}{2}} , \quad t_2 \in \gamma_2 ,$$

wobei die Konstante D_3 unabhängig von t_0 und von $t_1 \in \gamma_{\frac{\varepsilon}{2}}$, $t_2 \in \gamma_2$ ist.

Hieraus folgt:

$$|\phi(t_1, t_0) - \phi(t_2, t_0)| \leq \frac{D_3}{d_1^\alpha} \cdot d_1^\alpha \leq D\, |t_1 - t_2|^\alpha ,$$

$$\forall\, t_1 \in \gamma_{\frac{\varepsilon}{2}} , \quad t_2 \in \gamma_2 ,$$

wobei die Konstante D unabhängig von t_0 und von $t_1 \in \gamma_{\frac{\varepsilon}{2}}$, $t_2 \in \gamma_2$ ist. Wegen der Symmetrie der abzuschätzend Größe in t_1 und t_2 gilt die letzte Abschätzung analog für $t_1 \in \gamma_2$ und $t_2 \in \gamma_{\frac{\varepsilon}{2}}$.

7.) Wählt man $N = \mathrm{Max}\ (M, K, C, \tilde{C}, D)$, so gilt:

$$|\phi(t_1, t_o) - \phi(t_2, t_o)| \leq N\ |t_1 - t_2|^{\alpha} \quad \forall\ t_1, t_2 \in L,$$

wobei die Konstante N von t_o und von $t_1, t_2 \in L$ unabhängig ist.

Dies folgt aus den Fällen 2.) bis 6.), da jede mögliche Wahl der Punkte $t_1, t_2 \in L$ zu mindestens einem dieser Fälle führt.

Eine in einem metrischen Raum X gelegene Menge M heisst kompakt, wenn jede unendliche Teilmenge dieser Menge eine konvergente Folge enthält.

Ein auf einem linearen normierten Raum E definierter Operator A, dessen Wertebereich in dem linearen normierten Raum E_1 liegt, heisst vollstetig, wenn er jede beschränkte Menge aus E in eine kompakte Menge in E_1 abbildet.

Satz 8 : Vor.: 1.) $k(t) \in H_{\alpha}^{m+1}(L)_m$

2.) $\varphi(t) \in H_{\alpha}^{m}(L)_m$

3.) $\mathfrak{K}\varphi = \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{k(t) - k(t_o)}{t - t_o}\, \varphi(t)\, dt$

Beh.: $\mathfrak{K}$ ist ein vollstetiger linearer beschränkter Operator, der $H_{\alpha}^{m}(L)_m$ in sich abbildet.

Beweis: 1.) $\mathfrak{K}$ bildet $H^m_\alpha(L)_m$ in sich ab.

Sei $\varphi(t) \in H^m_\alpha(L)_m$. Nach Hilfssatz 2 existiert das Integral

$$\frac{1}{\pi i}\int_L \frac{k(t) - k(t_o)}{t - t_o}\,\varphi(t)\,dt$$

und mit $\psi = \mathfrak{K}\varphi$ erhält man ebenfalls nach Hilfssatz 2:

$$\frac{d^\ell}{dt^\ell}\psi = \frac{d^\ell}{dt^\ell}\mathfrak{K}\varphi = \frac{d^\ell}{dt^\ell}\frac{1}{\pi i}\int_L \frac{k(\tau) - k(t)}{\tau - t}\,\varphi(\tau)\,d\tau$$

$$= \frac{1}{\pi i}\int_L \frac{\sum_{\lambda=0}^{\ell}\binom{\ell}{\lambda}\left(k^{(\ell-\lambda)}(\tau) - k^{(\ell-\lambda)}(t)\right)\varphi^{(\lambda)}(\tau)}{\tau - t}\,d\tau,\quad (\ell = 0,1,\ldots,$$

Da $\varphi(t), k(t) \in H^m_\alpha(L)_m$ ist (vgl. Bemerkung 3), folgt hieraus mit Hilfe von Bemerkung 5, dass $\psi(t) \in H^m_\alpha(L)_m$ ist.

2.) Additivität.

$$\mathfrak{K}(\varphi_1 + \varphi_2) = \frac{1}{\pi i}\int_L \frac{k(t) - k(t_o)}{t - t_o}\,(\varphi_1(t) + \varphi_2(t))\,dt = \mathfrak{K}\varphi_1 + \mathfrak{K}\varphi_2$$

für alle $\varphi_1(t), \varphi_2(t) \in H^m_\alpha(L)_m$.

3.) Beschränktheit von $\mathfrak{K}$.

$$H_\alpha^m(\mathfrak{K}\varphi, L) = H_\alpha^m(S(k\varphi) - k S\varphi, L)$$

$$\leqslant H_\alpha^m(S(k\varphi), L) + H_\alpha^m(k S\varphi, L).$$

Nach Satz 3 und Satz 6 folgt:

$$\leqslant K \cdot H_\alpha^m(k\varphi, L) + M \cdot H_\alpha^m(k, L)\, H^m(S\varphi, L)$$

$$\leqslant K_1 \cdot H_\alpha^m(k,L) H_\alpha^m(\varphi,L) + K_2\, H_\alpha^m(k,L)\, H_\alpha^m(\varphi,L)$$

$$\leqslant K_3\, H_\alpha^m(\varphi,L), \text{ wobei die Konstante } K_3 \text{ nicht}$$

von $\varphi(t)$ abhängt.

4.) Vollstetigkeit von $\mathfrak{K}$.

Sei M eine unendliche beschränkte Menge von Funktionen $\varphi(t) \in H_\alpha^m($
d.h. für $\varphi(t) \in M$ gilt:

$$(+)\quad H_\alpha^m(\varphi,L) = \sum_{k=o}^{m} \max_{t\in L} \left|\varphi^{(k)}(t)\right| + \sup_{t_1,t_2\in L} \frac{\left|\varphi^{(m)}(t_1) - \varphi^{(m)}(t_2)\right|}{\left|t_1 - t_2\right|^\alpha} \leqslant R,$$

wobei R eine Konstante ist, die von $\varphi(t) \in M$ unabhängig ist.

Aus der Definition der Norm folgt, dass die Funktionen $\varphi(t)$, $\varphi'(t),\ldots,\varphi^{(m)}(t)$ gleichmässig beschränkt und gleichgradig stetig sind.

Wir beweisen die gleichgradige Stetigkeit.

Nach Hilfssatz 1 gilt, da $\varphi(t) \in H_\alpha^m(L)_m$ ist:

$$\sup_{t_1,t_2\in L} \frac{|\varphi^{(k)}(t_1) - \varphi^{(k)}(t_2)|}{|t_1 - t_2|^\alpha} \leq K_k \cdot \max_{t\in L} |\varphi^{(k+1)}(t)| \leq K_k \cdot R \text{ nach } (+)$$

$(k=o,1,\ldots,m-1)$, wobei die K_k von $\psi(t) \in M$ unabhängig sind.

Nach (+) gilt weiterhin:

$$\sup_{t_1,t_2\in L} \frac{|\varphi^{(m)}(t_1) - \varphi^{(m)}(t_2)|}{|t_1 - t_2|^\alpha} \leq R, \text{ wobei } R \text{ unabhängig von } \varphi(t)\in M \text{ i}$$

Sei $K = \text{Max}\,(K_o R, K_1 R, \ldots, K_{m-1} R, R)$, so gilt:

$$\sup_{t_1,t_2\in L} \frac{|\varphi^{(k)}(t_1) - \varphi^{(k)}(t_2)|}{|t_1 - t_2|^\alpha} \leq K\ ,\ (k = o,1,\ldots,m),$$

wobei die Konstante K von $\varphi(t) \in M$ unabhängig ist.

$$\curvearrowright |\varphi^{(k)}(t_1) - \varphi^{(k)}(t_2)| \leq K\ |t_1 - t_2|^\alpha\ ;\ k = o,\ldots,m;\ \ t_1,t_2 \in L.\ ($$

$\curvearrowright$ Zu $\varepsilon > 0$ $\exists\ \delta(\varepsilon) = \frac{1}{K^{\alpha}} \varepsilon^{\frac{1}{\alpha}}$, so dass $\forall\ \varphi(t) \in M, \forall\ t_1, t_2 \in L$ mit

$|t_1 - t_2| < \delta(\varepsilon)$ gilt: $|\varphi^{(k)}(t_1) - \varphi^{(k)}(t_2)| \leq \varepsilon$, $k = 0,1,\ldots,m$;

denn aus $|t_1 - t_2| \leq \delta(\varepsilon) = \frac{1}{K^{\frac{1}{\alpha}}} \varepsilon^{\frac{1}{\alpha}} \curvearrowright K\,|t_1 - t_2| \leq \varepsilon$ und mit (++)

folgt: $|\varphi^{(k)}(t_1) - \varphi^{(k)}(t_2)| \leq \varepsilon$.

Nach dem Satz von Arzela kann man daher aus jeder unendlichen Teilmenge dieser Funktionen eine konvergente Teilfolge

$$\varphi_1, \varphi_2, \ldots$$

auswählen. Konvergent heisst hierbei bezüglich der im Raum der stetigen Funktionen üblichen Maximum-Norm, bezüglich der dieser Raum vollständig ist.

Wir wählen also aus M eine konvergente Folge aus und bezeichnen ihren Grenzwert mit $\varphi_{(0)}(t)$.

$$\{\varphi_\nu(t)\}: \max_{t \in L} |\varphi_\nu(t) - \varphi_{(0)}(t)| \xrightarrow[\nu \to \infty]{} 0\ , \quad \varphi_\nu(t) \Longrightarrow \varphi_{(0)}(t).$$

Weiter betrachten wir die Folge der abgeleiteten Funktionen dieser Folge:

$\{\varphi'_\nu(t)\}$. Dies ist eine unendliche Teilmenge gleichmässig beschränkter und gleichgradig stetiger Funktionen. Nach Arzela existiert eine Teilfolge, so dass gilt:

$$\{\varphi'_{\nu_{k_1}}(t)\}: \max_{t \in L} |\varphi'_{\nu_{k_1}}(t) - \varphi_{(1)}(t)| \xrightarrow[\nu_{k_1} \to \infty]{} 0 \quad ; \quad \varphi'_{\nu_{k_1}}(t) \Longrightarrow \varphi_{(1)}(t).$$

Ebenso für die höheren Ableitungen bis zur Ordnung m:

$$\left\{\varphi''_{\nu_{k_2}}(t)\right\}: \max_{t\in L} \left|\varphi''_{\nu_{k_2}}(t) - \varphi_{(2)}(t)\right| \xrightarrow[\nu_{k_2}\to\infty]{} 0 \quad ; \quad \varphi''_{\nu_{k_2}}(t) \Longrightarrow \varphi_{(2)}(t),$$

$$\vdots$$

$$\left\{\varphi^{(m)}_{\nu_{k_m}}(t)\right\}: \max_{t\in L} \left|\varphi^{(m)}_{\nu_{k_m}}(t) - \varphi_{(m)}(t)\right| \xrightarrow[\nu_{k_m}\to\infty]{} 0 \quad ; \quad \varphi^{(m)}_{\nu_{k_m}} \Longrightarrow \varphi_{(m)}(t).$$

Betrachten wir jetzt die Folge $\left\{\varphi_{\nu_{k_m}}(t)\right\} \underset{\text{Def.}}{=} \left\{\varphi_\mu(t)\right\}$, so gilt:

$$\max_{t\in L} \left|\varphi^{(k)}_\mu(t) - \varphi_{(k)}(t)\right| \xrightarrow[\mu\to\infty]{} 0 \quad \text{für} \quad k = 0,1,\ldots,m,$$

d.h. $\varphi^{(k)}_\mu(t) \Longrightarrow \varphi_{(k)}(t)$ für $k = 0,1,\ldots,m$.

Bekanntlich folgt hieraus:

$$\varphi_{(k)}(t) = \varphi_{(0)}{}^{(k)}(t) \quad , \quad k = 0,1,\ldots m.$$

Aus M kann man also eine Folge $\left\{\varphi_\mu(t)\right\}$ so auswählen, dass gilt:

$$(*) \qquad \max_{t\in L} \left|\varphi^{(k)}_\mu(t) - \varphi_{(0)}{}^{(k)}(t)\right| \xrightarrow[\mu\to\infty]{} 0, \quad k = 0,1\ldots,m.$$

Wir zeigen, dass $\varphi_{(0)}(t) \in H^m_\alpha(L)_m$ ist.

$\varphi_{(0)}(t)$ ist m-mal stetig differenzierbar nach obigen Überlegungen.

Da für alle $\mu \in \mathbb{N}$ die Funktionen $\varphi_\mu(t)$ Elemente von M sind, gilt

$$\sum_{k=o}^{m} \max_{t\in L} \left| \left(\varphi_n(t) - \varphi_{n+k}(t) \right)^{(k)} \right| +$$

$$+ \sup_{t_1,t_2\in L} \frac{\left| \varphi_n^{(m)}(t_1) - \varphi_{n+p}^{(m)}(t_1) - \varphi_n^{(m)}(t_2) + \varphi_{n+p}^{(m)}(t_2) \right|}{|t_1 - t_2|^\alpha}$$

und zwar für alle $n, p \in \mathbb{N}$.

$$\curvearrowright \left| \varphi_n^{(m)}(t_1) - \varphi_{n+p}^{(m)}(t_1) - \varphi_n^{(m)}(t_2) + \varphi_{n+p}^{(m)}(t_2) \right| \leq 2R \left| t_1 - t_2 \right|^\alpha ,$$

wobei die Konstante R von $p \in \mathbb{N}$ unabhängig ist.

Mit (*) folgt für $p \longrightarrow \infty$:

$$\left| \varphi_n^{(m)}(t_1) - \varphi_{(o)}^{(m)}(t_1) - \varphi_n^{(m)}(t_2) + \varphi_{(o)}^{(m)}(t_2) \right| \leq 2R \left| t_1 - t_2 \right|^\alpha$$

und hieraus, da $\varphi_n(t) \in H_\alpha^m(L)_m$ ist:

$$\left| \varphi_{(o)}^{(m)}(t_1) - \varphi_{(o)}^{(m)}(t_2) \right| \leq \left| \varphi_n^{(m)}(t_1) - \varphi_{(o)}^{(m)}(t_1) - \varphi_n^{(m)}(t_2) + \varphi_{(o)}^{(m)}(t_2) \right| +$$

$$+ \left| \varphi_n^{(m)}(t_1) - \varphi_n^{(m)}(t_2) \right| \leq (2R + C) . \left| t_1 - t_2 \right|^\alpha$$

$\varphi_{(o)}^{(m)}(t)$ genügt also auf L einer Hölderbedingung mit Index α.

Da $\mathcal{K}$ ein linearer und beschränkter Operator ist, der $H_\alpha^m(L)_m$ in sich abbildet, bildet er eine beschränkte Menge M aus $H_\alpha^m(L)_m$ in eine beschränkte Menge N aus $H_\alpha^m(L)_m$ ab.

Es ist zu zeigen, dass die Bildmenge N eine kompakte Menge ist.

Aus der beschränkten Menge $M \subset H_\alpha^m(L)_m$ wählen wir eine Folge $\{\varphi_\mu(t)\}$ mit der Eigenschaft (*) aus und betrachten:

$$\psi_\mu(t) = \mathcal{K}\varphi_\mu(t) \quad , \quad \psi(t) = \bar{\mathcal{K}}\varphi_{(o)}(t) \; ; \; \varphi_\mu \in M.$$

Wir zeigen, dass $H_\alpha^m(\psi_\mu(t) - \psi(t), L) \xrightarrow[\mu\to\infty]{} o$, d.h., dass es in N eine konvergente Folge gibt.

Sei $\omega_\mu(t) = \psi_\mu(t) - \psi(t)$; es ist zu zeigen, dass

$$\lim_{\mu\to\infty}\left(\sum_{k=o}^{m}\max|\omega_\mu^{(k)}(t)| + \sup_{t_1,t_2\in L}\frac{|\omega_\mu^{(m)}(t_1) - \omega_\mu^{(m)}(t_2)|}{|t_1 - t_2|^\alpha}\right) = o$$

ist. Durch m-malige Anwendung von Hilfssatz 2 ergibt sich für $l = o,1,\ldots,m$:

$$\omega_\mu^{(l)}(t) = \frac{1}{\pi i}\int_L \frac{\sum_{\lambda=o}^{\ell}\binom{\ell}{\lambda}\left(k^{(\ell-\lambda)}(\tau) - k^{(\ell-\lambda)}(t)\right)\left(\varphi_\mu^{(\lambda)}(\tau) - \varphi_{(o)}^{(\lambda)}(\tau)\right)}{\tau - t}\,d\tau .$$

Hieraus folgt:

$$\left|\omega_\mu^{(l)}(t)\right| \leq K \sum_{\lambda=o}^{l} \max_{t\in L} \left|\varphi_\mu^{(\lambda)}(t) - \varphi_{(o)}^{(\lambda)}(t)\right| \int_L \left| \frac{k^{(l-\lambda)}(\tau) - k^{(l-\lambda)}(t)}{\tau - t} \right|$$

$$\leq C_l \sum_{\lambda=o}^{l} \max_{t\in L} \left|\varphi_\mu^{(\lambda)}(t) - \varphi_{(o)}^{(\lambda)}(t)\right|, \quad (l = o,1,\ldots m).$$

Mit $K_1 = \max (C_o, C_1, \ldots, C_m)$ ergibt sich:

$$\sum_{l=o}^{m} \max_{t\in L} \left|\omega_\mu^{(l)}(t)\right| \leq K_1 \sum_{l=o}^{m} \sum_{\lambda=o}^{l} \max_{t\in L} \left|\varphi_\mu^{(\lambda)}(t) - \varphi_{(o)}^{(\lambda)}(t)\right|$$

$$\leq K_2 \sum_{\lambda=o}^{m} \max_{t\in L} \left|\varphi_\mu^{(\lambda)}(t) - \varphi_{(o)}^{(\lambda)}(t)\right| .$$

Beachtet man (*), so sieht man mit Hilfe dieser Ungleichung, dass

$$(**) \qquad \lim_{\mu\to\infty} \sum_{l=o}^{m} \max_{t\in L} \left|\omega_\mu^{(l)}(t)\right| = o$$

ist. Es bleibt noch die folgende Relation zu zeigen:

$$(***) \qquad \lim_{\mu\to\infty} \sup_{t_1, t_2 \in L} \frac{\left|\omega_\mu^{(m)}(t_1) - \omega_\mu^{(m)}(t_2)\right|}{\left|t_1 - t_2\right|^\alpha} = o.$$

$$\left| \omega_\mu^{(m)}(t_1) - \omega_\mu^{(m)}(t_2) \right| =$$

$$= \left| \frac{1}{\pi i} \int_L \sum_{\lambda=0}^{m} \binom{m}{\lambda} \left(\frac{k^{(m-\lambda)}(\tau) - k^{(m-\lambda)}(t_1)}{\tau - t_1} - \frac{k^{(m-\lambda)}(\tau) - k^{(m-\lambda)}(t_2)}{\tau - t_2} \right) \left(\varphi_\mu^{(\lambda)}(\tau) - \varphi_{(o)}^{(\lambda)}(\tau) \right) d\sigma \right|$$

$$\leq \tilde{M} \cdot \sum_{\lambda=0}^{m} \max_{t \in L} \left| \varphi_\mu^{(\lambda)}(t) - \varphi_{(o)}^{(\lambda)}(t) \right| \int_L \left| \frac{k^{(m-\lambda)}(\tau) - k^{(m-\lambda)}(t_1)}{\tau - t_1} - \frac{k^{(m-\lambda)}(\tau) - k^{(m-\lambda)}(t_2)}{\tau - t_2} \right| d\sigma ,$$

wobei $\tilde{M}$ eine Konstante bedeutet.

Da $k(t) \in H_\alpha^{m+1}(L)_m$ ist, folgt mit Hilfe von Satz 7 die Hölderstetigkeit des Integranden und damit:

$$\frac{\left| \omega_\mu^{(m)}(t_1) - \omega_\mu^{(m)}(t_2) \right|}{\left| t_1 - t_2 \right|^\alpha} \leq \tilde{K} \sum_{\lambda=0}^{m} \max_{t \in L} \left| \varphi_\mu^{(\lambda)}(t) - \varphi_{(o)}^{(\lambda)}(t) \right|$$

und hieraus (***).

Aus (**) und (***) folgt: $\lim_{\mu \to \infty} H_\alpha^m (\omega_\mu(t), L) = o$, d. h. $\psi_\mu(t)$ konvergiert bezüglich der Norm in $H_\alpha^m (L)_m$ gegen $\psi(t)$.

Der Operator $\mathfrak{K}$ bildet also jede beschränkte Menge aus $H_\alpha^m (L)_m$ in eine kompakte Menge aus $H_\alpha^m (L)_m$ ab, womit alles gezeigt ist.

Kapitel II

§ 1. Eine spezielle Klasse von Grundräumen mit den zugehörigen verallgemeinerten Funktionen.

Wir betrachten bei festem m den Banachraum $H_\alpha^m(L)_m$. Um zu zeigen, dass dieser Funktionenraum im Sinne von GELFAND-SCHILOW ein Grundraum ist, haben wir zu beweisen, dass aus der Konvergenz der Folge $\{\varphi_\nu(t)\}$, $\varphi_\nu(t) \in H_\alpha^m(L)_m$, gegen ein Element $\varphi(t) \in H_\alpha^m(L)_m$ bezüglich der Norm in $H_\alpha^m(L)_m$ die Konvergenz der Zahlenfolge $\{\varphi_\nu(t_o)\}$ gegen $\varphi(t_o)$ für jedes feste $t_o \in L$ folgt.

Satz 1: $H_\alpha^m(L)_m$ stellt für jedes feste $m = o,1,\ldots$ einen Grundraum dar.

Beweis: Sei $\{\varphi_\nu(t)\}$ eine Folge von Elementen aus $H_\alpha^m(L)_m$, die bezüglich der dort eingeführten Norm gegen ein Element $\varphi(t) \in H_\alpha^m(L)_m$ konvergiert. Für jedes feste $t_o \in L$ gilt dann:

$$|\varphi_\nu(t_o) - \varphi(t_o)| \leq \max_{t \in L} |\varphi_\nu(t) - \varphi(t)| \leq H_\alpha^m(\varphi_\nu - \varphi, L).$$

Hieraus folgt unmittelbar die Behauptung.

Die zum Grundraum $H_\alpha^m(L)_m$ gehörigen verallgemeinerten Funktionen.

Wir betrachten bei festem m die linearen und stetigen Funktionale über $H_\alpha^m(L)_m$, d.h. die Menge der Abbildungen f von $H_\alpha^m(L)_m$

in den Raum der komplexen Zahlen $\mathbb{C}$:

$$f : \quad H_\alpha^m (L)_m \longrightarrow \mathbb{C}$$

mit :

1.) $f[\varphi + \psi] = f[\varphi] + f[\psi]$; $\varphi, \psi \in H_\alpha^m (L)_m$.

2.) $f[\varphi_\nu] \xrightarrow[\nu \to \infty]{} 0$ falls $H_\alpha^m (\varphi_\nu, L) \xrightarrow[\nu \to \infty]{} 0$.

Ein auf einem linearen normierten Raum definiertes additives Funktional ist bekanntlich genau dann stetig, wenn es beschränkt ist, ein additives stetiges Funktional ist homogen.

Zwei lineare stetige Funktionale f, g über $H_\alpha^m (L)_m$ heissen gleich, wenn für alle $\varphi \in H_\alpha^m (L)_m$ gilt:

$$f[\varphi] = g[\varphi] .$$

Satz 2: Jede auf L stetige Funktion f(t) definiert durch

$$f[\varphi] = \int_L f(t) \varphi(t) . dt$$

eindeutig ein lineares stetiges Funktional über $H_\alpha^m (L)_m$.

Wir nennen diese Funktionale regulär und bezeichnen sie durch (f, φ).

Beweis: Das Integral $\int_L f(t)\,\varphi(t)dt$ existiert für jedes $\varphi \in H_\alpha^m(L)_m$ und stellt eine Abbildung von $H_\alpha^m(L)_m$ in den Raum der komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ dar, die offensichtlich linear ist.

Die Stetigkeit der Abbildung folgt aus:

$$\left|(f,\varphi_\nu)\right| = \left|\int_L f(t)\,\varphi_\nu(t)dt\right| \leqslant l.C.\max_{t\in L}\left|\varphi_\nu(t)\right| .$$

Die Ungleichung gilt für alle $\varphi_\nu \in H_\alpha^m(L)_m$, wobei

l = Länge von L,

$C = \max_{t\in L}\left|f(t)\right|$ ist.

Definition 1 : Die Abbildung $\delta_{t_o} : H_\alpha^m(L)_m \longrightarrow \mathbb{C}$, erklärt durch

$$\delta_{t_o}[\varphi] = \varphi(t_o) \quad \forall\, \varphi \in H_\alpha^m(L)_m,$$

$$t_o \in L,\ t_o \text{ fest}$$

heisst Dirac'sche δ-Funktion.

Satz 3 : Die Dirac'sche δ-Funktion ist ein lineares und stetiges Funktional über $H_\alpha^m(L)_m$.

Beweis: 1.) $\delta_{t_o}[\varphi + \psi] = \varphi(t_o) + \psi(t_o) = \delta_{t_o}[\varphi] + \delta_{t_o}[\psi]$

$$\forall\ \varphi, \psi \in H_\alpha^m(L)_m.$$

2.) $$\left|\delta_{t_o}[\varphi]\right| = \left|\varphi(t_o)\right| \leq \max_{t \in L} \left|\varphi(t)\right| \leq H_\alpha^m(\varphi, L)_m.$$

Definition 2 : Die Summe zweier linearer stetiger Funktionale f, g über $H_\alpha^m(L)_m$, sowie das Produkt eines linearen stetigen Funktionals mit einer komplexen Zahl α werden erklärt durch:

$$(f + g)[\varphi] = f[\varphi] + g[\varphi], \quad \forall\, \varphi \in H_\alpha^m(L)_m$$

$$(\alpha f)[\varphi] = \alpha \cdot f[\varphi], \quad \forall\, \varphi \in H_\alpha^m(L)_m.$$

Mit Definition 2 wird die Menge der linearen stetigen Funktionale über $H_\alpha^m(L)_m$ zu einem linearen Raum, der durch Einführung der Norm

$$H_\alpha^m(f,L)' = \sup_{H_\alpha^m(\varphi,L) \leq 1} \left| f[\varphi] \right|$$

bekanntlich zu einem Banachraum wird, dem zu $H_\alpha^m(L)_m$ konjugierten Raum, der durch $H_\alpha^m(L)_m'$ bezeichnet wird.

Bemerkung 1: 1.) Die Elemente von $H_\alpha^m(L)_m'$ werden durch f,g,... bezeichnet.

2.) Da $H_\alpha^m(L)_m$ ein Grundraum ist, sind die Elemente von $H_\alpha^m(L)_m'$ nach der Terminologie von GELFAND-SCHILOW (2) verallgemeinerte Funktionen

Verallgemeinerte Funktionen sind in Abhängigkei vom Grundraum erklärt. $H_\alpha^m(L)_m'$ ist der Raum der zu $H_\alpha^m(L)_m$ gehörigen verallgemeinerten Funktionen.

Definition 3 : Multiplikatoren in $H_\alpha^m(L)_m$.

Eine Funktion g(t) heisst Multiplikator im Grundraum $H_\alpha^m(L)_m$, falls mit $\varphi(t)$ auch $g(t)\,\varphi(t)$ aus $H_\alpha^m(L)_m$ ist und aus der Konvergenz von $\varphi_\nu(t) \in H_\alpha^m(L)_m$ ($\nu = 1,2,\ldots$) gegen Null im Sinne der Norm in $H_\alpha^m(L)_m$ stets auch $g(t).\varphi_\nu(t) \xrightarrow[\nu \to \infty]{} o$ fo

Mit Satz 3, Kapitel I erhält man unmittelbar:

Satz 4 : Vor.: $g(t) \in H_\alpha^m(L)_m$.

Beh.: $g(t)$ ist Multiplikator in $H_\alpha^m(L)_m$.

Satz 5 : Vor.: $0 \leqslant k \leqslant m \quad ; \quad k, m \in \mathbb{Z}$.

Beh.: Jedem Element aus $H_\alpha^k(L)_k'$ entspricht ein Element aus $H_\alpha^m(L)_m'$.

Beweis: 1.) Jedem $\varphi(t) \in H_\alpha^m(L)$ wird eineindeutig ein $\chi(t) \in H_\alpha^m(L)_m$ zugeordnet durch die Vorschrift:

$$\chi(t_o) = \varphi(t_o) \quad \forall \; t_o \in L.$$

Hierdurch wird eine offensichtlich lineare Abbildung beschrieben, die durch T_1 bezeichnet werde:

$$T_1 \varphi = \chi .$$

Andererseits wird jedem $\varphi(t) \in H_\alpha^m(L)$ eindeutig ein $\psi(t) \in H_\alpha^k(L)_k$ zugeordnet durch die Vorschrift:

$$\psi(t_o) = \varphi(t_o) \quad \forall \; t_o \in L.$$

Die hierdurch beschriebene Abbildung von $H_\alpha^m(L)$ in $H_\alpha^k(L)_k$ ist ebenfalls linear, sie werde durch T_2 bezeichnet:

$$T_2 \varphi = \psi$$

Es sei $N = \{ \psi(t) \in H_\alpha^k(L)_k \mid \psi(t) = T_2 \varphi(t), \varphi(t) \in H_\alpha^m(L) \}$.

Es gilt: $N \subseteq H_\alpha^k(L)_k$ und T_2 ist eine lineare Abbildung, die $H_\alpha^m(L)$ umkehrbar eindeutig auf N abbildet.

2.) Aus 1.) folgt, dass der Operator $T = T_2 T_1^{-1}$ den Raum $H_\alpha^m(L)_m$ linear in den Raum $H_\alpha^k(L)_k$ abbildet. Die Abbildung ist auch stetig, denn aus $H_\alpha^m(\chi_n, L) \xrightarrow[n\to\infty]{} o$ folgt

$$H_\alpha^k(T_2 T_1^{-1} \chi_n, L) = H_\alpha^k(\psi_n, L) \xrightarrow[n\to\infty]{} o \qquad \text{wegen:}$$

$$H_\alpha^k(\psi_n, L) = \sum_{\lambda=o}^{k} \max_{t\in L} \left| \varphi_n^{(\lambda)}(t) \right| + \sup_{t_1, t_2 \in L} \frac{\left| \varphi_n^{(k)}(t_1) - \varphi_n^{(k)}(t_2) \right|}{|t_1 - t_2|^\alpha}$$

$$\leq M \left\{ \sum_{\lambda=o}^{m} \max_{t\in L} \left| \varphi_n^{(\lambda)}(t) \right| + \sup_{t_1, t_2 \in L} \frac{\left| \varphi_n^{(m)}(t_1) - \varphi_n^{(m)}(t_2) \right|}{|t_1 - t_2|^\alpha} \right.$$

$$\leq M \cdot H_\alpha^m(\chi_n, L).$$

(vgl. Hilfssatz 1, § 2, Kapitel I).

3.) Betrachtet man nun ein $f \in H_\alpha^k(L)_k'$, dann ist f definiert für $\psi(t) = T\chi(t)$, wobei $\chi(t)$ ein beliebiges Element aus $H_\alpha^m(L)_m$ ist.

Es gilt: $f[\psi(t)] = f[T\chi(t)] = f_1[\chi(t)]$.

Offenbar ist f_1 linear und nach 2.) auch stetig.

Es entspricht also jedem $f \in H_\alpha^k(L)_k'$ ein $f_1 \in H_\alpha^m(L)_m'$.

Satz 6 : Eine ein reguläres Funktional $(f,\varphi) = \int_L f(t)\varphi(t)dt$ über $H_\alpha^m(L)_m$ definierende, auf L stetige Funktion f(t) wird umgekehrt durch das reguläre Funktional eindeutig bestimmt, wenn $L \in K_\alpha^m$ ist. ($m \in \mathbb{N}$).

Beweis: 1.) Es genügt zu zeigen, dass für eine beliebige auf $L \in K_\alpha^m$ stetige Funktion F(t) aus der Beziehung:

$$\int_L F(t)\,\varphi(t)\,dt = o \quad \forall \varphi \in H_\alpha^m(L)_m$$

die Idendität: $F(t) \equiv o$ folgt, denn seien

$(f,\varphi) = \int_L f(t)\varphi(t)\,dt$ und $(g,\varphi) = \int_L g(t)\varphi(t)dt$

zwei reguläre Funktionale über $H_\alpha^m(L)_m$ und sei

$$(f,\varphi) = (g,\varphi) \quad \forall \varphi \in H_\alpha^m(L)_m,$$

so ist der Satz bewiesen, wenn hieraus $f(t) \equiv g(t)$, $(t \in L)$ folgt.

Es gilt aber :

$$(f,\varphi) = (g,\varphi) \quad \forall \varphi \in H_\alpha^m(L)_m \overset{m}{\curvearrowright} \int_L [f(t) - g(t)]\,\varphi(t)dt = o$$

$$\forall \varphi \in H_\alpha^m(L)_m.$$

2.) Es sei also $L \in K_\alpha^m$, $F(t)$ stetig auf L und es gelte:

$$(*) \quad \int_L F(t)\varphi(t)dt = o \quad \forall \varphi \in H_\alpha^m(L)_m .$$

Wir wollen zeigen, dass dann $F(t) \equiv o$, $(t \in L)$ ist.

Aus $(*)$ folgt, da $L \in K_\alpha^m$ ist :

$$\int_o^1 F(t(s))\varphi(t(s))\,\dot{t}\,(s)\,ds = o \quad \forall \varphi(t(s)) \in C_\alpha^m(L).$$

(vgl.Satz 2, Kapitel I).

Wir setzen: $F(t(s)) \cdot \dot{t}(s) = F_1(s) + i\,F_2(s)$

$$\varphi(t(s)) = \varphi_1(t(s)) + i\varphi_2(t(s)).$$

Dann geht obige Gleichung über in:

$$\int_o^1 (F_1(s)\,\varphi_1(t(s)) - F_2(s)\,\varphi_2(t(s)))\,ds = o, \varphi_i(t(s)) \in C_\alpha^m(L).$$

$$\int_o^1 (F_2(s)\varphi_1(t(s)) + F_1(s)\,\varphi_2(t(s)))\,ds = o; \varphi_i(t(s)) \in C_\alpha^m(L).$$
$$(i = 1,2).$$

Insbesondere muss also gelten:

$$\int_0^1 (F_1(s) - F_2(s))\, \varphi_1(t(s))\, ds = 0$$

$$\forall\ \varphi_1(t(s)) \in C_\alpha^m(L).$$

$$\int_0^1 (F_1(s) + F_2(s))\, \varphi_1(t(s))\, ds = 0$$

3.) Ist $G(s)$ eine reellwertige, in $0 \leq s \leq 1$ stetige Funktion und gilt:

$$(**) \qquad \int_0^1 G(s)\, \varphi(t(s))\, ds = 0 \quad \text{für alle reellwertigen } \varphi(t(s)) \in C_\alpha^m(L),$$

dann ist $G(s) \equiv 0$, denn angenommen $G(s)$ sei nicht in allen Punkten des Intervalls $[0,1]$ gleich Null, sondern es existiere eine Stelle $s_0 \in [0,1]$, so dass $G(s_0) \neq 0$, etwa $G(s_0) > 0$ ist.

Wegen der Stetigkeit von $G(s)$ darf man annehmen, dass $s_0 \in (0,1)$ ist, und es existiert ein δ mit $\frac{1}{4} > \delta > 0$, so dass

1.) $[s_0 - \delta\ ,\ s_0 + \delta] \subset (0,\ 1)$

2.) $G(s) > 0 \qquad \forall\ s \in [s_0 - \delta\ ,\ s_0 + \delta]$

ist. Setzt man nun:

$$\varphi^*(t(s)) = 0 \quad \text{für} \quad s \in [0, s_0 - \delta], \quad s \in [s_0 + \delta, 1]$$

$$\varphi^*(t(s)) = (t(s) - t(s_0+\delta))^{2m} \overline{(t(s) - t(s_0+\delta))^{2m}} \cdot$$

$$(t(s) - t(s_0 - \delta))^{2m} \overline{(t(s) - t(s_0 - \delta))^{2m}}$$

$$\text{für } s \in [s_0 - \delta, s_0 + \delta],$$

so gilt: 1.) $\varphi^*(t(s)) \in C_\alpha^m(L)$

2.) $$\int_0^1 G(s) \cdot \varphi^*(t(s))ds = \int_{s_0-\delta}^{s_0+\delta} G(s) \cdot \varphi^*(t(s))ds > 0$$

Dies steht im Widerspruch zu (**), so dass die Annahme, dass $G(s)$ an einer Stelle $s_0 \in [0,1]$ von Null verschieden sei, falsch ist.

4.) Mit Hilfe von 3.) erhält man aus 2.):

$$F_1(s) \equiv F_2(s)$$

$$F_1(s) \equiv -F_2(s)$$

$\curvearrowright F_1(s) \equiv F_2(s) \equiv 0 \curvearrowright F(t(s))\dot{t}(s) \equiv 0 \curvearrowright F(t(s)) \equiv 0$ da $\dot{t}(s) \neq 0 \quad \forall \quad s \in [0,1]$ ist.

Aus $F(t(s)) \equiv 0$ folgt $F(t) \equiv 0$, $(t \in L)$.

Bemerkung 2: Eine Satz 6 entsprechende Aussage gilt auch für reguläre Funktionale über $H_\alpha^0(L)_0$, wenn $L \in K_\alpha^1$ ist. Der Nachweis verläuft analog zum Beweis von Satz 6.

§ 2. Definition der Multiplikation einer Funktion mit einer verallgemeinerten Funktion, Definition und einige Eigenschaften des Operators S' für Elemente aus $H^m_\alpha(L)'_m$.

1.) Wir betrachten bei festem m den Grundraum $H^m_\alpha(L)_m$. Die Multiplikation einer Funktion aus $H^m_\alpha(L)_m$ mit einem Multiplikator in $H^m_\alpha(L)_m$ ist eine lineare und stetige Operation in $H^m_\alpha(L)_m$, wie man mit Hilfe von Definition 3 dieses Kapitels sieht. Die zugehörige adjungierte Operation existiert und stellt eine lineare stetige Transformation von $H^m_\alpha(L)'_m$ in sich dar.

Definition 4: Unter der Multiplikation einer verallgemeinerten Funktion $f \in H^m_\alpha(L)'_m$ mit einem Multiplikator $a(t)$ in $H^m_\alpha(L)_m$ verstent man die zur Multiplikation mit $a(t)$ im Grundraum adjungierte Operation.

Sie wird beschrieben durch

$$\{a(t)f\}[\varphi(t)] = f[a(t)\varphi(t)] \quad \forall \varphi \in H^m_\alpha(L)_m.$$

Rechtfertigung: Sei $f(t)$ eine auf L definierte, stetige Funktion. Dann definiert $f(t)$ das reguläre Funktional

$$(f, \varphi) = \int_L f(t)\varphi(t)\,dt$$

über $H^m_\alpha(L)_m$. Ist $a(t)$ ein Multiplikator in $H^m_\alpha(L)_m$, so gilt:

$$(f, a\varphi) = \int_L f(t)a(t)\varphi(t)\,dt = \int_L a(t)f(t)\varphi(t)dt = (af$$

2.) In Kapitel I, § 3 wurde die Cauchy-Transformation S für Elemente aus $H_\alpha^m(L)$ eingeführt. S ist ein linearer und beschränkter Operator, der $H_\alpha^m(L)_m$ in sich abbildet (vgl. Folgerung 1 und Satz 6, § 3, Kapitel I).

Der zugehörige adjungierte Operator existiert und stellt einen linearen und beschränkten Operator dar, der $H_\alpha^m(L)_m'$ in sich abbildet.

Definition 5: Unter der Cauchy-Transformation S' für Elemente aus $H_\alpha^m(L)_m'$ ist die zur Cauchy-Transformation S in $H_\alpha^m(L)_m$ negative adjungierte Transformation zu verstehen.

Sie wird beschrieben durch:

$$\{S'f\}[\varphi] = - f[S\varphi] \quad \forall f \in H_\alpha^m(L)_m', \forall \varphi \in H_\alpha^m(L)$$

Rechtfertigung: Sei f(t) eine auf L definierte Funktion, die dort einer Hölderbedingung mit Index α genügt. Dann definiert f(t) das reguläre Funktional:

$$(f,\varphi) = \int_L f(t)\varphi(t)\,dt$$

über $H_\alpha^m(L)_m'$. Nach einer bekannten Eigenschaft Cauchyscher Hauptwertintegrale gilt dann:

$$-(f,S\varphi) = -\int_L f(\tau)\frac{1}{\pi i}\int_L \frac{\varphi(t)}{t-\tau}\,dt\,d\tau$$

$$= \frac{1}{\pi i}\int_L \varphi(\tau)\int_L \frac{f(t)}{t-\tau}\,dt\,d\tau = (Sf,\varphi).$$

Bemerkung 3 : 1.) a.)Sind $\varphi(t), \psi(t) \in H_\alpha^m(L)$, so gilt bekanntlich die Formel von Poincaré-Bertrand(+

$$\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t_o} \int_L \frac{\psi(t)}{t - \tau}\, dt\, d\tau = -\pi^2 \varphi(t_o)\,\psi(t_o) + \left(\int_L \frac{\varphi(t)}{t - t_o}\, dt\right).\left(\int_L \frac{\psi(t)}{t - t_o}\, dt\right) - \int_L \frac{\psi(\tau)}{\tau - t_o} \int_L \frac{\varphi(t)}{t - \tau}\, dt\, d\tau,$$

oder unter Verwendung des Operators S geschrieben:

$$(*) \quad S(\varphi S\psi) = \varphi\psi + (S\varphi)(S\psi) - S([S\varphi]\psi).$$

b.) Ist $\varphi(t) \in H_\alpha^m(L)$, so gilt die folgende Umkehrformel:

$$(**) \quad S^2\varphi = \varphi$$

2.) Beide Formeln unter 1.) lassen sich leicht auf verallgemeinerte Funktionen übertragen:

a.) Ist $\psi(t) \in H_\alpha^m(L)_m$ und $f \in H_\alpha^m(L)'_m$, so gilt die Formel von Poincaré-Bertrand auch für verallgemeinerte Funktionen:

$$S'(\psi S'f) = \psi f + S\psi\, S'f - S'(S\psi f),$$

denn $S'(\psi S'f)[\varphi] = -\psi S'f\,[S\varphi] = -S'f[\psi S\varphi] = f[S(\psi S\varphi)]$

nach (*) $= f[\varphi\psi] + f[(S\psi)(S\varphi)] - f[S(\{S\psi\}\varphi)]$

$= \psi f[\varphi] - S'(S\psi f)[\varphi] + (S\psi)\,S'f[\varphi]$

(+)Siehe Muskhelishvili (6) ,Seite 57 und beachte Partialbruchzerlegung.

Die Gleichung gilt für alle $\varphi(t) \in H_\alpha^m(L)_m$ und für alle $f \in H_\alpha^m(L)_m'$, so dass die Behauptung bewiesen ist.

b.) Ist $f \in H_\alpha^m(L)_m'$, so gilt:

$$S'^2 f = f ,$$

denn $S'^2 f[\varphi] = - S' f[S\varphi] = f[S^2\varphi] = f[\varphi]$

und zwar für alle $\varphi(t) \in H_\alpha^m(L)_m$ und für alle $f \in H_\alpha^m(L)_m'$.

Kapitel III

§ 1. Über eine Klasse singulärer Integralgleichungen.

Es gelte auch hier im folgenden stets:

1.) $L \in K_\alpha^1$, $m \geq 0$ fest, $m \in \mathbb{Z}$, $0 < \alpha < 1$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

2.) Wird eine Funktion durch Anwendung eines Operators in eine andere Funktion transformiert, so bezieht sich das Argument auf die Bildfunktion.

3.) Der einfacheren Schreibweise wegen werden im folgenden bei den auftretenden Funktionen die Argumente weggelassen, wenn keine Verwechslungen möglich sind.

In diesem Paragraphen wird die Gleichung

$$(1) \qquad N\varphi(t) \equiv N_0\varphi(t) + V\varphi(t) = \psi(t)$$

untersucht, wobei $N_0\varphi(t) = a(t)\varphi(t) + b(t)S\varphi(t)$

mit $a(t), b(t) \in H_\alpha^{m+1}(L)_m$, $\varphi(t) \in H_\alpha^m(L)_m$

und V ein vollstetiger Operator ist, der $H_\alpha^m(L)_m$ in sich abbildet.

Der Operator N_0 heisst "charakteristischer Teil des Operators N."

Satz 1: N_0 ist ein linearer und beschränkter Operator, der den Raum $H_\alpha^m(L)_m$ in sich abbildet.

Beweis: 1.) Nach Folgerung 1, § 3, Kapitel I ist mit $\varphi(t)$ auch $S\varphi(t)$ aus $H_\alpha^m(L)_m$, aus $a(t)$, $b(t) \in H_\alpha^{m+1}(L)_m$ folgt, dass $a(t)$, $b(t) \in H_\alpha^m(L)_m$ ist und nach Satz 3, § 2, Kapitel I folgt hiermit, dass mit $\varphi(t) \in H_\alpha^m(L)_m$ auch $N_0\varphi(t) = a(t)\varphi(t) + b(t)S\varphi(t) \in H_\alpha^m(L)_m$ ist.

2.) Die Additivität von N_0 ist klar, während die Beschränktheit unmittelbar aus Satz 3, § 2, Kapitel I und Satz 6, § 3, Kapitel I folgt, denn:

$$H_\alpha^m(N_0\varphi, L) = H_\alpha^m(a(t)\varphi(t) + b(t)\,S\varphi(t),\, L)$$

$$\leqslant H_\alpha^m(a(t)\varphi(t),\, L) + H_\alpha^m(b(t)\,S\varphi(t),\, L)$$

$$\leqslant M_1 \cdot H_\alpha^m(a(t),\, L) \cdot H_\alpha^m(\varphi(t), L)$$

$$+ M_2 \cdot H_\alpha^m(b(t), L)\, K \cdot H_\alpha^m(\varphi(t), L)$$

$$\leqslant M_3 \cdot H_\alpha^m(\varphi(t), L).$$

Bemerkung 1: Nach Satz 1 und der Definition von V ist klar, dass $\psi(t)$ in (1) notwendigerweise aus $H_\alpha^m(L)_m$ sein muss, wenn die Gleichung (1) Lösungen in $H_\alpha^m(L)_m$ haben soll.

Wir betrachten nun den zu $H_\alpha^m(L)_m$ konjugierten Raum $H_\alpha^m(L)_m'$ und den zu N_0 gehörigen adjungierten Operator N_0'.

Da N_o ein linearer und beschränkter Operator ist, der $H_\alpha^m(L)_m$ in sich abbildet, stellt N_o' einen linearen und beschränkten Operator dar, der $H_\alpha^m(L)_m'$ in sich abbildet.

Bemerkung 2: Der zu N_o adjungierte Operator N_o' ist gegeben durch:

$$N_o' f = a(t)f - S' b(t)f , \quad f \in H_\alpha^m(L)_m'.$$

Beweis: Sei $f \in H_\alpha^m(L)_m'$. Dann erhält man unter Beachtung von § 2, Kapitel II:

$$N_o' f[\varphi] = f[N_o\varphi] = f[a(t)\varphi(t) + b(t)\, S\varphi(t)]$$

$$= f[a(t)\varphi(t)] + f[b(t)\, S\varphi(t)]$$

$$= a(t)\, f[\varphi(t)] + b(t)\, f[S\varphi(t)]$$

$$= a(t)\, f[\varphi(t)] - S' b(t) f[\varphi(t)]$$

$$= (a(t)\, f - S' b(t) f)[\varphi(t)] \quad \forall \varphi \in H_\alpha^m(L)_m$$

d.h. $N_o' f = a(t)f - S' b(t)f$.

Wir wollen noch zeigen, dass N_o in $H_\alpha^m(L)_m$ ein Noetherscher Operator (vgl. Anhang) ist.

Im folgenden gelte stets:

1.) $a(t)$, $b(t) \in H_\alpha^{m+1}(L)_m$

2.) $a_o(t) = a(t) + b(t) \neq o$

$b_o(t) = a(t) - b(t) \neq o$, $\forall\, t \in L$

3.) $a_1(t) = \frac{1}{2} \left\{ a_o^{-1}(t) + b_o^{-1}(t) \right\}$

$b_1(t) = \frac{1}{2} \left\{ a_o^{-1}(t) - b_o^{-1}(t) \right\}$

Bemerkung 3: Es gilt: 1.) $a_i(t),\ b_i(t) \in H_\alpha^{m+1}(L)_m$, $(i=o,1)$

2.) $a_1(t)a(t) + b_1(t)b(t) = 1$

3.) $a_1(t)\, b(t) + b_1(t)\, a(t) = o$.

Wir betrachten den Operator M in $H_\alpha^m(L)_m$, definiert durch:

$$M\varphi = a_1\varphi + S(b_1\varphi) \quad , \quad \varphi \in H_\alpha^m(L)_m .$$

M ist ein linearer und beschränkter Operator, der $H_\alpha^m(L)_m$ in sich abbildet, wie man mit analogen Überlegungen wie beim Beweis von Satz 1, § 1, Kapitel III sieht.

Satz 2: Ist $\varphi(t) \in H_\alpha^m(L)_m$, so lässt sich $MN_o\varphi$ aufspalten in der Form:

$$MN_o\varphi = \varphi + V_o\varphi ,$$

wobei V_o ein vollstetiger Operator ist, der $H_\alpha^m(L)_m$ in sich abbildet.

Beweis: $\psi = N_0\varphi = a\varphi + bS\varphi \in H_\alpha^m(L)_m$

$$MN_0\varphi = M\psi = a_1\psi + S(b_1\psi)$$

$$= a_1 a\varphi + a_1 b S\varphi + S(ab_1\varphi) + S(bb_1 S\varphi).$$

Es gilt: $S(ab_1\varphi) = a b_1 S\varphi + V_1\varphi$ mit

$$V_1\varphi = \frac{1}{\pi i}\int_L \frac{a(\tau)\,b_1(\tau) - a(t)b_1(t)}{\tau - t}\,\varphi(\tau)\,d\tau.$$

Nach Satz 8, § 3, Kapitel I, ist V_1 ein vollstetiger Operator, der $H_\alpha^m(L)_m$ in sich abbildet.

Es gilt: $S(bb_1 S\varphi) = b_1 b\, S^2\varphi + V_2\varphi$ mit $V_2 = \frac{1}{(\pi i)^2}\int_L \frac{b_1(\tau)b(\tau) - b_1(t)b(t)}{\tau - t}d\tau \int_L \frac{\varphi(\tau}{\tau_1 - \tau}$

$$V_2\varphi = V_2^1 S\varphi \quad \text{mit} \quad V_2^1\psi = \left(\frac{1}{\pi i}\right)^2 \int_L \frac{b_1(\tau)b(\tau) - b_1(t)b(t)}{\tau - t}\,\psi(\tau)$$

Mit $\{\varphi\}$ ist auch $\{S\varphi\}$ eine beschränkte Menge in $H_\alpha^m(L)_m$ und nach Satz 8, § 3, Kapitel I wird durch V_2^1 eine beschränkte Menge in eine kompakte Menge abgebildet, d.h. $V_2^1 S = V_2$ ist ein vollstetiger Operator, der $H_\alpha^m(L)_m$ in sich abbildet.

Es gilt also: $MN_o\varphi = a_1a\varphi + a_1bS\varphi + ab_1S\varphi + V_1\varphi + b_1bS^2\varphi + V_2\varphi$,
und da $S^2\varphi = \varphi$ ist:

$$MN_o\varphi = (a_1a+b_1b)\varphi + (a_1b+ab_1)S\varphi + V_1\varphi + V_2\varphi,$$

(vgl.Bem.3) $= \varphi + V_o\varphi$ mit $V_o = V_1 + V_2$, wobei V als Summe vollstetiger Operatoren ebenfalls vollsteti ist.

Satz 3: Ist $\psi(t) \in H_\alpha^m(L)_m$, so gilt:

$$N_oM\psi = \psi + V^o\psi,$$

wobei V^o ein vollstetiger Operator ist, der $H_\alpha^m(L)_m$ in sich abbildet.

Beweis: $N_oM\psi = aa_1\psi + aS(b_1\psi) + bS(a_1\psi + Sb_1\psi)$

$= aa_1\psi + aS(b_1\psi) + bS(a_1\psi) + bS^2(b_1\psi)$

$= \psi + aS(b_1\psi) + bS(a_1\psi).$

Es gilt: $aS(b_1\psi) = ab_1S\psi + V_{o1}\psi$

mit $$V_{o1}\psi = \frac{1}{\pi i}\int_L \frac{a(t)b_1(\tau)-a(t)b_1(t)}{\tau-t}\psi(\tau)d\tau$$

$$V_{o1}\psi = a(t)\,V'_{o1}\psi = a(t)\frac{1}{\pi i}\int_L \frac{b_1(\tau)-b_1(t)}{\tau-t}\psi(\tau)$$

Durch V_{01}^{1} wird nach Satz 8, § 3, Kap. I eine beschränkte Menge aus $H_{\alpha}^{m}(L)_m$ in eine kompakte Menge aus $H_{\alpha}^{m}(L)_m$ abgebildet und da die Multiplikation mit a(t) eine lineare und beschränkte Operation in $H_{\alpha}^{m}(L)_m$ ist, eine lineare und beschränkte Operation aber bekanntlich eine kompakte Menge in eine kompakte Menge abbildet, so ist V_{01} ein vollstetiger Operator in $H_{\alpha}^{m}(L)_m$.

Es gilt: $b\,S\,(a_1\psi) = a_1\,b\,S\psi + V_{02}\psi$ mit

$$V_{02}\psi = \frac{1}{\pi i}\int_L \frac{b(t)a_1(\tau) - b(t)a_1(t)}{\tau - t}\,\psi(\tau)\,d\tau.$$

V_{02} ist ebenfalls ein vollstetiger Operator in $H_{\alpha}^{m}(L)_m$.

Es gilt also: $N_o\,M\psi = \psi + (ab_1 + a_1b)\,S\psi + (V_{01} + V_{02})\psi = \psi + V^{o}\psi$,

wobei V^{o} ein vollstetiger Operator in $H_{\alpha}^{m}(L)_m$ ist.

Nach Nikolski (7) (vgl. Anhang) folgt nach Satz 2, dass MN_o, und nach Satz 3, dass $N_o\,M$ Fredholmsche Operatoren sind. Nach Atkinson (1) folgt hieraus (vgl. Anhang):

1.) N_o ist ein Noetherscher Operator.

2.) $N = N_o + V_b$ ist ein Noetherscher Operator, wobei V_b ein beliebiger vollstetiger Operator in $H_{\alpha}^{m}(L)_m$ ist.

Für die Gleichung (1) gelten somit folgende Aussagen über die Lösbarkeit und die Lösungsmannigfaltigkeit, die sogenannten Noetherschen Sätze:

1.) Die homogenen Gleichungen

$$N_o\varphi + V\varphi = o \quad , \quad (\varphi \in H_\alpha^m(L)_m)$$

$$N_o' f + V' f = o \quad , \quad (f \in H_\alpha^m(L)_m'),$$

wobei $N_o' + V'$ der zu $N_o + V$ adjungierte Operator ist, haben eine endliche Anzahl, ν_m bzw. ν_m^*, linear unabhängiger Lösungen in den Räumen $H_\alpha^m(L)_m$ bzw. $H_\alpha^m(L)_m'$.

2.) $N_o\varphi + V\varphi = \psi$, $(\varphi \in H_\alpha^m(L)_m)$ ist genau dann lösbar, wenn $f_j[\psi] = o$, $j = 1,\ldots, \nu_m^*$ ist, wobei $f_1, \ldots, f_{\nu_m^*}$ ein vollständiges System linear unabhängiger Lösungen der Gleichung $N_o' f + V'f = o$ in $H_\alpha^m(L)_m'$ ist.

3.) ind $(N_o + V)$ = ind (N_o), (vgl. Anhang).

Bei MUSKHELISHVILI (6) wird die folgende Klasse singulärer Integralgleichungen behandelt:

$$(3) \qquad a(t)\varphi(t) + \frac{1}{\pi i}\int_L \frac{K(t,t_o)}{t - t_o}\varphi(t_o)\,dt_o = \psi(t).$$

L ist ein Kurvensystem, das aus endlich vielen geschlossenen, doppeltpunktfreien glatten Kurven L_o, L_1,..., L_p besteht, die ein zusammenhängendes endliches Gebiet begrenzen. L_o soll alle übrigen Kurven umfassen. Die Funktion a(t) genügt auf L einer Höderbedingung mit Index α, ebenso $K(t,t_o)$ bezüglich t und t_o; das Integral ist im Sinne des Cauchyschen Hauptwertes zu verstehen. Die Gleichung (3) ist äquivalent mit:

$$(4) \quad a(t)\varphi(t) + \frac{b(t)}{\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}\,d\tau + \frac{1}{\pi i}\int_L k(t,\tau)\varphi(\tau)\,d\tau = \psi(\tau)$$

$$\text{mit} \quad b(t) = K(t,t), \quad k(t,\tau) = \frac{K(t,\tau) - K(t,t)}{\tau - t},$$

wobei der Zusatzkern in folgender Form darstellbar ist:

$$(5) \qquad k(t,t_o) = \frac{k^*(t,t_o)}{|t - t_o|^\lambda}, \qquad o \leqslant \lambda < 1.$$

$k^*(t,t_o)$ genügt in beiden Variablen einer Hölderbedingung.

Es werden Gleichungen vom normalen Typ betrachtet, d.h. es wird vorausgesetzt, dass

$$a(t) + b(t) \neq o \qquad \forall\, t \in L$$

$$a(t) - b(t) \neq o$$

Gesucht sind diejenigen Lösungen von (4),die auf L einer Hölderbedingung genügen.

Setzt man voraus,dass L aus einer einzigen geschlossenen Kurve der Klasse K_α^1 besteht und betrachtet die Gleichung (4) in $H_\alpha^o(L)_o$,dann ist diese Gleichung ein Spezialfall der in § 1, Kapitel III behandelten Gleichungen,wenn der Zusatzkern derart ist,dass die Transformation

$$T\varphi = \int_L k(t,\tau)\,\varphi(\tau)\,d\tau$$

vollstetig in $H_\alpha^o(L)_o$ ist.

Die spezielle Gestalt der Gleichung (4) bringt einige Vorteile mit sich,was ihre Behandlung angeht,ebenso bezüglich der Voraussetzungen,die man an die Koeffizienten a(t),b(t) zu stellen hat.

Die Untersuchungen in diesem Paragraphen sind insofern vorzuziehen,als sie in jedem Raum $H_\alpha^m(L)_m$ und für beliebige dort vollstetige Operatoren V gültig sind.Die hier verwendete Methode lässt sich,wie wir im nächsten Paragraphen sehen werden,auch in den Räumen verallgemeinerter Funktionen $H_\alpha^m(L)_m'$ anwenden.

§2. Eine Verallgemeinerung der Gleichung (1) von § 1 und ihre Behandlung in Räumen verallgemeinerter Funktionen $H_\alpha^m(L)'_m$.

Es gelte wie in § 1 dieses Kapitels:

1.) $a(t),\ b(t) \in H_\alpha^{m+1}(L)_m$.

2.) $a_o(t) = a(t) + b(t) \neq o$

$b_o(t) = a(t) - b(t) \neq o$ $\quad \forall\ t \in L$.

3.) $a_1(t) = \frac{1}{2}\left\{ a_o^{-1}(t) - b_o^{-1}(t) \right\}$.

$b_1(t) = \frac{1}{2}\left\{ a_o^{-1}(t) - b_o^{-1}(t) \right\}$.

Die Funktionen $a(t)$, $b(t)$ sind Multiplikatoren in $H_\alpha^m(L)_m$.

Es sei $f \in H_\alpha^m(L)'_m$. Durch:

$$\tilde{N}_o' f = a(t)f + b(t)\, S' f$$

definieren wir den Operator $\tilde{N}_o'$ für verallgemeinerte Funktionen $f \in H_\alpha^m(L)'_m$.

Führt man die Bezeichnung

$$\tilde{N}_o \varphi(t) = a(t)\varphi(t) - S\,(b\varphi)(t)\ ,\quad \varphi(t) \in H_\alpha^m(L)_m$$

ein, so gilt: $\tilde{N}_o' f[\varphi] = f[\tilde{N}_o \varphi]$, denn:

$$\tilde{N}_o' f[\varphi] = (a(t)f + b(t)S'f)[\varphi] = a(t)f[\varphi] + b(t)S'f[\varphi]$$
$$= f[a\varphi - Sb\varphi] = f[\tilde{N}_o\varphi], \quad \forall \varphi \in H_\alpha^m(L)_m.$$

Satz 4: Der Operator $\tilde{N}_o'$ ist ein linearer und beschränkter Operator, der den Raum $H_\alpha^m(L)_m'$ in sich abbildet.

Beweis: 1.) Mit φ ist auch $\tilde{N}_o\varphi$ aus $H_\alpha^m(L)_m$ und daraus folgt, dass $\tilde{N}_o' f[\varphi] = f[\tilde{N}_o\varphi]$ für alle $\varphi \in H_\alpha^m(L)_m$ und alle $f \in H_\alpha^m(L)_m'$ erklärt ist, denn jedes f ist als Element von $H_\alpha^m(L)_m'$ für alle $\varphi \in H_\alpha^m(L)_m$ erklärt und damit auch für $\tilde{N}_o\varphi \in H_\alpha^m(L)_m$.

2.) $\tilde{N}_o' f$ ist aus $H_\alpha^m(L)_m'$.

$$\tilde{N}_o' f[\alpha_1\varphi_1 + \alpha_2\varphi_2] = f[\alpha_1\tilde{N}_o\varphi_1 + \alpha_2\tilde{N}_o\varphi_2]$$

$$= \alpha_1\tilde{N}_o' f[\varphi_1] + \alpha_2\tilde{N}_o' f[\varphi_2] \quad \text{für } f \in H_\alpha^m(L)_m'$$

und für alle $\varphi_1, \varphi_2 \in H_\alpha^m(L)_m$; $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}$.

Sei $\varphi_\nu \in H_\alpha^m(L)_m$ mit $H_\alpha^m(\varphi_\nu, L) \xrightarrow[\nu\to\infty]{} 0$.

Betrachten wir:

$$\tilde{N}_o' f[\varphi_\nu] = f[\tilde{N}_o\varphi_\nu] = f[a\varphi_\nu] - f[S(b\varphi_\nu)],$$

so folgt:

$$\left|\tilde{N}_o' f[\varphi_\nu]\right| \leq \left|f[a\varphi_\nu]\right| + \left|f[S(b\varphi_\nu)\right| .$$

Da $f \in H_\alpha^m(L)_m'$ ist, gilt aber: $\left|f[\varphi]\right| \leq M_1 \cdot H_\alpha^m(\varphi, L)$, $\varphi \in H_\alpha^m(L)_m$.

Damit ergibt sich wegen Satz 3, § 2, Kapitel I und Satz 6, § 3, Kapitel I:

$$\left|\tilde{N}_o' f[\varphi_\nu]\right| \leq M_1 \cdot (H_\alpha^m(a\varphi_\nu, L) + H_\alpha^m(S(b\varphi_\nu), L))$$

$$\leq M \cdot H_\alpha^m(\varphi_\nu, L).$$

Mit $H_\alpha^m(\varphi_\nu, L) \xrightarrow[\nu\to\infty]{} 0$ gilt also auch $\left|\tilde{N}_o' f[\varphi_\nu]\right| \xrightarrow[\nu\to\infty]{} 0$.

3.) $\tilde{N}_o'$ ist ein linearer und beschränkter Operator.

a.) $\tilde{N}_o'\{\alpha f + \beta g\}[\varphi] = \{\alpha f + \beta g\}[\tilde{N}_o\varphi] = \alpha f[\tilde{N}_o\varphi] + \beta g[\tilde{N}_o\varphi]$

$$= \alpha \tilde{N}_o' f[\varphi] + \beta \tilde{N}_o' g[\varphi] \quad \forall \varphi \in H_\alpha^m(L)_m,$$

für $f, g \in H_\alpha^m(L)_m'$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$.

b.) Es ist zu zeigen, dass $H_\alpha^m(\tilde{N}_o' f, L)' \leq M \cdot H_\alpha^m(f, L)'$ gilt, wobei die Konstante M nicht von f abhängt.

Es gilt:

$$(*) \qquad H^m_\alpha(\tilde{N}_0\varphi, L) \leq M.H^m_\alpha(\varphi, L),$$

wobei die Konstante M nicht von $\varphi \in H^m_\alpha(L)_m$ abhängt, denn

$$H^m_\alpha(\tilde{N}_0\varphi, L) = H^m_\alpha(a\varphi - S(b\varphi), L) \leq H^m_\alpha(a\varphi, L) + H^m_\alpha(S(b\varphi), L)$$

$$\leq M_2.H^m_\alpha(\varphi, L) + M_3.H^m_\alpha(\varphi, L),$$

(vgl. Satz 3, §2 und Satz 6, §3 von Kapitel I).

$$\curvearrowright \quad H^m_\alpha(\tilde{N}_0\varphi, L) \leq M.H^m_\alpha(\varphi, L), \quad \text{mit } M = 2.\mathrm{Max}(M_2, M_3) > 0.$$

Betrachten wir nun:

$$\frac{1}{M} H^m_\alpha(\tilde{N}_0' f, L)' = \frac{1}{M} \sup_{H^m_\alpha(\varphi, L) \leq 1} \left| f[\tilde{N}_0\varphi] \right| = \sup_{H^m_\alpha(\varphi, L) \leq 1} \left| f[\frac{\tilde{N}_0\varphi}{M}] \right|$$

$$\leq \sup_{H^m_\alpha(\varphi, L) \leq 1} \left| f[\varphi] \right|.$$

Die Ungleichung folgt aus (*). Hieraus ergibt sich unmittelbar die Behauptung unter b.).

Weiter betrachten wir die beiden linearen und beschränkten Operatoren, die $H^m_\alpha(L)_m$ in sich abbilden:

$$\tilde{N}_0\varphi = a\varphi - S(b\varphi)$$

$$M_1\psi = a_1\psi - b_1 S\psi \qquad \varphi, \psi \in H^m_\alpha(L)_m$$

und bilden:

$$M_1 \tilde{N}_o = a_1 (a\varphi - S(b\varphi)) - b_1 S (a\varphi - S(b\varphi))$$

$$= a_1 a\varphi - a_1 S(b\varphi) - b_1 S (a\varphi) + b_1 S^2 (b\varphi)$$

$$= (a_1 a + b_1 b)\varphi - a_1 S (b\varphi) - b_1 S (a\varphi)$$

$$= \varphi - a_1 S (b\varphi) - b_1 S (a\varphi) , \quad \text{da} \quad a_1 a + b_1 b = 1 \quad \text{ist.}$$

$$= \varphi + (a_1 b S\varphi - a_1 S (b\varphi)) + (b_1 a S\varphi - b_1 S (a\varphi)) - (a_1 b + b_1 a) S$$

$$= \varphi + (a_1 b S\varphi - a_1 S (b\varphi)) + (b_1 a S\varphi - b_1 S(a\varphi)),$$

$$\text{da} \quad a_1 b + b_1 a = o \text{ ist.}$$

$$= \varphi - \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{a_1(t)b(\tau) - a_1(t)b(t)}{\tau - t} \varphi(\tau)\, d\tau -$$

$$- \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{b_1(t)a(\tau) - b_1(t)a(t)}{\tau - t} \varphi(\tau) d\tau$$

$$= \varphi + V\varphi \quad , \text{ wobei } V \text{ ein vollstetiger Operator in } H_\alpha^m(L)_m$$

ist. (Begründung analog zu derjenigen beim Beweis zu Satz 2 des vorhergehenden Paragraphen.)

Ist $f \in H_\alpha^m(L)'_m$, so ergibt sich hiernach:

$$(+) \qquad f[(E+V)\varphi] = f[M_1 \tilde{N}_o \varphi] = \tilde{N}'_o M'_1 f[\varphi] .$$

M_1' ist als adjungierter Operator zu M_1 ein linearer und beschränkter Operator, der $H_\alpha^m(L)_m'$ in sich abbildet.
Der adjungierte Operator einer Summe von Operatoren ist gleich der Summe der adjungierten Operatoren. Hiernach gilt:

$$(E + V)' = E' + V'.$$

Ist V ein vollstetiger Operator in $H_\alpha^m(L)_m$, so ist V' ein vollstetiger Operator in $H_\alpha^m(L)_m'$ (vgl. Anhang). Nach (+) folgt hiermit:

$$\tilde{N}_o' M_1' = E' + V'.$$

Nach NIKOLSKI (7) folgt, dass $\tilde{N}_o' M_1'$ ein Fredholmscher Operator in $H_\alpha^m(L)_m'$ ist.

Wir bilden nun:

$$\tilde{N}_o M_1 \psi = a(a_1\psi - b_1 S\psi) - S(b(a_1\psi - b_1 S\psi)) \quad \text{mit} \quad \psi \in H_\alpha^m(L)_m$$

$$= aa_1\psi - ab_1 S\psi - S(ba_1\psi) + S(bb_1 S\psi)$$

$$= (aa_1 + bb_1)\psi - b_1 bS^2\psi - ab_1 S\psi - a_1 bS\psi +$$

$$+ a_1 bS\psi - S(ba_1\psi) + S(bb_1 S\psi)$$

$$= \psi - b_1 bS^2\psi + a_1 bS\psi - S(ba_1\psi) + S(bb_1 S\psi)$$

$$= \psi - \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{b(\tau)a_1(\tau) - b(t)a_1(t)}{\tau - t} \psi(\tau)d\tau +$$

$$+ \frac{1}{(\pi i)^2} \int_L \frac{b(\tau)b_1(\tau) - b(t)b_1(t)}{\tau - t} d\tau \int_L \frac{\psi(\tau_1)}{\tau_1 - \tau} d\tau_1$$

$$= \psi + V_1\psi, \text{ wobei } V_1 \text{ ein vollstetiger Operator ist,}$$

der $H_\alpha^m(L)_m$ in sich abbildet.
(Begründung wie vorher).

Ist $f \in H_\alpha^m(L)'_m$, so ergibt sich hiernach:

(++) $\quad f[(E + V_1)\psi] = f[(\tilde{N}_o M_1)\psi] = M_1' \tilde{N}_o' f[\psi]$.

M_1' ist als adjungierter Operator zu M_1 ein linearer beschränkter Operator, der $H_\alpha^m(L)'_m$ in sich abbildet.

Aus (++) folgt: $(E + V_1)' f[\psi] = M_1' \tilde{N}_o' f[\psi]$

und zwar für alle $\psi \in H_\alpha^m(L)_m$, $f \in H_\alpha^m(L)'_m$.

$$\curvearrowright \quad (E + V_1)' = M_1' \tilde{N}_o'$$

$$\curvearrowright \quad E' + V_1' = M_1' \tilde{N}_o' ,$$

wobei V_1' ein vollstetiger Operator in $H_\alpha^m(L)'_m$ ist.

Nach NIKOLSKI (7) folgt:
$M_1' \tilde{N}_o'$ ist ein Fredholmscher Operator in $H_\alpha^m(L)'_m$.

Wir haben also gezeigt, dass $M_1' \tilde{N}_o'$ und $\tilde{N}_o' M_1'$ Fredholmsche Operatoren in $H_\alpha^m(L)'_m$ sind.

Zu dem linearen und beschränkten Operator $\tilde{N}_o'$, der $H_\alpha^m(L)'_m$ in sich abbildet, existiert also ein linearer und beschränkter Operator M_1', der $H_\alpha^m(L)'_m$ in sich abbildet, so dass $M_1' \tilde{N}_o'$ und $\tilde{N}_o' M_1'$ Fredholmsche Operatoren in $H_\alpha^m(L)'_m$ sind. Nach dem ersten Satz von ATKINSON (1) folgt daher, dass $\tilde{N}_o'$ ein Noetherscher Operator in $H_\alpha^m(L)'_m$ ist und hieraus nach dem zweiten Satz von ATKINSON (1), dass auch $\tilde{N}_o' + V_b'$ in $H_\alpha^m(L)'_m$ ein Noetherscher Operator ist, wobei V_b' ein beliebiger vollstetiger Operator in $H_\alpha^m(L)'_m$ ist.

Insgesamt haben wir also gezeigt:

Satz 5: Die Gleichung

$$(\tilde{N}_o' + V_b') \; f = g \quad ; \quad f, g \in H_\alpha^m(L)_m'$$

ist für jedes feste $m \geq o$, $m \in \mathbb{Z}$ in $H_\alpha^m(L)_m'$ eine Noethersche Gleichung, d.h. es gelten für sie die Noetherschen Sätze (vgl. Anhang).

§ 3. Vergleich der in § 1 und § 2 dieses Kapitels behandelten Gleichungen.

Wir beschränken uns in diesem Paragraphen auf die Betrachtung der jeweiligen Hauptteilgleichungen:

(1) $N_o\varphi(t) = a(t)\varphi(t) + b(t)\, S\varphi(t) = \psi(t)$; $\varphi(t) \in H_\alpha^m(L)_m$.

(2) $\tilde{N}_o' f = a(t)\, f + b(t)\, S' f = g$; $f \in H_\alpha^m(L)_m'$.

Die Voraussetzungen über die Koeffizienten a(t), b(t) waren in beiden Paragraphen dieselben:

1.) $a(t), b(t) \in H_\alpha^{m+1}(L)_m'$.

2.) $a_o(t) = a(t) + b(t) \neq o$
$b_o(t) = a(t) - b(t) \neq o$ $\quad \forall\, t \in L$.

Wir haben gesehen, dass der Operator N_o den Raum $H_\alpha^m(L)_m$ in sich abbildet; ebenso, dass $\tilde{N}_o'$ den Raum $H_\alpha^m(L)_m'$ in sich abbildet.

Es muss also notwendigerweise $\psi(t) \in H_\alpha^m(L)_m$, bzw. $g \in H_\alpha^m(L)'_m$ sein, wenn (1) bzw. (2) lösbar sein sollen. Die Inhomogenitäten $\psi(t)$ bzw. g in (1) bzw. (2) mögen stets diesen Bedingungen genügen.

Satz 6 : Es gelte $m \in \mathbb{N}$, $L \in K_\alpha^m$, die Inhomogenität g in (2) sei das durch $\psi(t) \in H_\alpha^m(L)_m$ erzeugte reguläre Funktional aus $H_\alpha^m(L)'_m$.

Sucht man dann Lösungen von (2) nur unter den durch Funktionen aus $H_\alpha^m(L)_m$ erzeugten regulären Funktionalen aus $H_\alpha^m(L)'_m$, so entspricht jeder solchen Lösung von (2) eine Lösung von (1) und umgekehrt.

Beweis: a.) Ist $f_1(t) \in H_\alpha^m(L)_m$ eine Lösung von (1), so ist das durch $f_1(t)$ eindeutig definierte reguläre Funktional $f_1 \in H_\alpha^m(L)'_m$ eine Lösung von (2), denn :

$$\tilde{N}'_o f_1[\varphi] = f_1[\tilde{N}_o \varphi] = \int_L f_1(t)\, \tilde{N}_o \varphi(t)\,dt = \int_L \varphi(t)\, N_o f_1(t)\,dt$$

$$= \int_L \psi(t)\,\varphi(t)\,dt = g[\varphi] \quad \forall\, \varphi(t) \in H_\alpha^m(L)_m.$$

b.) Ist $f_1 \in H_\alpha^m(L)'_m$ das durch $f_1(t) \in H_\alpha^m(L)_m$ erzeugte reguläre Funktional eine Lösung von (2), so ist $f_1(t)$ eine Lösung von (1), denn:

$$\int_L \psi(t)\,\varphi(t)\,dt = g[\varphi] = \tilde{N}_o' f_1[\varphi] = f_1[\tilde{N}_o \varphi] = \int_L f_1(t) \tilde{N}_o \varphi(t)\,dt =$$

$$\int_L \varphi(t) N_o f_1(t)\,dt.$$

Da dies für alle $\varphi(t) \in H_\alpha^m(L)_m$ gilt, folgt hieraus nach Satz 6, § 1, Kapitel II :

$$N_o f_1(t) = \psi(t).$$

Bemerkung 4: Eine Satz 6 entsprechende Aussage gilt auch für $m = o$, wenn $L \in K_\alpha^1$ vorausgesetzt ist, wie man analog zum Beweis von Satz 7 mit Hilfe von Bemerkung 2 , § 1 , Kapitel II sieht.

Um zu zeigen, dass die in § 2 dieses Kapitels behandelte Gleichung eine echte Verallgemeinerung der in § 1 behandelten Gleichung darstellt, genügt es, ein Beispiel einer Gleichung (2) anzugeben, deren Inhomogenität ein nicht-reguläres lineares stetiges Funktional über $H_\alpha^m(L)_m$ ist und die in $H_\alpha^m(L)_m'$ lösbar ist.

Die folgende Überlegung gilt der Konstruktion eines solchen Beispiels:

1.) Ist $L \in K_\alpha^1$, so existiert das folgende Integral für alle $t_o \in L$ und alle $\varphi \in H_\alpha^m(L)_m$ im Sinne des Cauchyschen Hauptwertes und definiert eine verallgemeinerte Funktion aus $H_\alpha^m(L)_m'$:

$$f_{t_o}[\varphi] = \int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t_o} d\tau ,$$

denn 1.) $f_{t_o}[\varphi_1 + \varphi_2] = f_{t_o}[\varphi_1] + f_{t_o}[\varphi_2]$

und zwar für alle $\varphi_1, \varphi_2 \in H_\alpha^m(L)_m$.

2.) für $\varphi_\nu(t) \in H_\alpha^m(L)_m$ $(\nu \in \mathbb{N})$ mit $H_\alpha^m(\varphi_\nu, L) \xrightarrow[\nu\to\infty]{} 0$ gilt: $f_{t_0}[\varphi_\nu] \xrightarrow[\nu\to\infty]{} 0$, denn:

$$|f_{t_0}[\varphi_\nu]| = |\pi i S\varphi_\nu(t_0)| \leq \max_{t\in L} |\pi i S\varphi_\nu(t)| \leq$$

$$\leq H_\alpha^m(\pi i S\varphi_\nu, L) \leq M.H_\alpha^m(\varphi_\nu, L)$$

(nach Satz 6, § 3, Kapitel I),wobei M eine Konstante ist,die nicht von φ_ν abhängt.

Wir bezeichnen diese verallgemeinerte Funktion f_{t_0} aus $H_\alpha^m(L)_m'$ formal durch $\frac{1}{\tau - t_0}$:

$$f_{t_0}[\varphi] = \frac{1}{\tau - t_0}[\varphi(\tau)] = \int_L \frac{\varphi(\ )}{\tau - t_0}\, d\tau.$$

2.) Es gilt : $\delta_{t_0} \in H_\alpha^m(L)_m'$.

Wir betrachten die verallgemeinerte Funktion $S'\delta_{t_0}$:

$$S'\delta_{t_0}[\varphi(\tau)] = -\delta_{t_0}[S\varphi(t)] = -\delta_{t_0}\left[\frac{1}{\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}\, d\tau\right]$$

$$= -\frac{1}{\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t_0}\, d\tau = -\frac{1}{\pi i}\,\frac{1}{\tau - t_0}[\varphi(\tau)]$$

und zwar für alle $\varphi(\tau) \in H_\alpha^m(L)_m$.

Hieraus folgt:

$$S'\delta_{t_0} = -\frac{1}{\pi i}\,\frac{1}{\tau - t_0},$$

oder indem wir die Umkehrformel (Bemerkung 3, § 2,Kapitel II) anwenden:

$$(*) \qquad \delta_{t_o} = -\frac{1}{\pi i} S' \frac{1}{\tau - t_o} .$$

Setzen wir in Gleichung (2) $a(t) \equiv o$, $b(t) \equiv 1$, $g = \delta_{t_o}$, so erhalten wir:

$$(**) \qquad S'f = \delta_{t_o} .$$

Dies ist aber eine Gleichung vom Typ (2), die eine nicht-reguläre Inhomogenität hat und in $H^m_\alpha(L)'_m$ lösbar ist, denn nach (*) ist klar dass die verallgemeinerte Funktion $-\frac{1}{\pi i} \frac{1}{\tau - t_o} \in H^m_\alpha(L)'_m$ eine Lösung ist.

Die Gleichung (**) fällt aber nicht in die Klasse der in § 1 dieses Kapitels behandelten Gleichungen, da dort die Inhomogenität notwendigerweise aus $H^m_\alpha(L)_m$ sein muss. Wir haben also gezeigt, dass die in § 2 behandelte Gleichung eine echte Verallgemeinerung der in § 1 untersuchten Gleichung darstellt.

A N H A N G

Zusammenstellung einiger Definitionen und Sätze aus der Theorie der linearen Gleichungen.

E_1 und E_2 seien zwei Banachräume.
Es sei $y = Ax$, A ein Operator, der auf E_1 definiert ist und in E_2 seinen Wertebereich hat.

Definition 1: Der Operator A heisst linear und beschränkt, wenn gilt:

1.) $A(x_1+x_2) = Ax_1 + Ax_2 \quad \forall\, x_i \in E_1$

2.) $\| Ax \|_2 \leq M \| x \|_1$, wobei M eine Konstante ist ($\| \ \|_1$ bedeutet hierbei Norm in E_1, $\| \ \|_2$ diejenige in E_2).

Bemerkung 1: Für Operatoren in Banachräumen gilt:

1.) Ein additiver Operator ist genau dann beschränkt, wenn er stetig ist.

2.) Jeder lineare und beschränkte Operator ist homogen.

3.) Jeder lineare und beschränkte Operator bildet eine beschränkte in eine beschränkte und eine kompakte in eine kompakte Menge ab.

4.) Ist A ein vollstetiger Operator, der E_1 in E_2 abbildet, so ist der zugehörige adjungierte Operator A^* ebenfalls vollstetig.

Definition 2: Eine Abbildung, die E_1 auf E_2 abbildet heisst homöomorph, wenn die Abbildung eineindeutig ist und A sowie A^{-1} stetig sind.

E_1^* , E_2^* seien die zu E_1, E_2 gehörigen konjugierten Räume, T sei ein linearer und beschränkter Operator, der E_1 in E_2 abbildet. Wir betrachten die folgende Gleichung:

$$T\varphi = f \quad , \quad \varphi \in E_1 \quad , \quad f \in E_2 \, .$$

Durch K(t) und $K^*(t)$ seien die folgenden linearen Mannigfaltigkeiten bezeichnet:

K (T) ist derjenige lineare Unterraum von E_1, der aus all denjenigen $\varphi \in E_1$ besteht, für die $T\varphi = o$ gilt.

$K^*(T)$ ist derjenige lineare Unterraum von E_2^* , der aus all denjenigen $l \in E_2$ besteht, für die $T^*l = o$ gilt.

Sind K (T) und $K^*(T)$ Unterräume endlicher Dimension, so wird die entsprechende Dimension durch $\nu(T)$ und $\nu_*(T)$ oder einfach durch ν, ν_* bezeichnet.

Definition 3: Der Operator T heisst "Fredholmscher Operator", wer

1.) K (T), $K^*(T)$ Unterräume endlicher Dimension sind,

2.) die Gleichung $T\varphi = f$ im Sinne Hausdorffs normal lösbar ist, d.h. $T\varphi = f$ besitzt genau dann eine Lösung, $\varphi \in E_1$, wenn $lf = o$ ist für alle $l \in K^*(T)$,

3.) $\nu = \nu_*$ ist.

Satz von Nikolski: Ein linearer und beschränkter Operator T, der E_1 in E_2 abbildet ist genau dann ein Fredholmscher Operator, wenn T in der Form

$$T = B + V$$

darstellbar ist, wobei B den Raum E_1 linear und homöomorph in ganz E_2 abbildet und V ein vollstetiger Operator ist.

Definition 4: Der Operator T heisst "Noetherscher" Operator, wenn

1.) $K(T)$, $K^*(T)$ Unterräume endlicher Dimension sind,

2.) die Gleichung $T\varphi = f$ im Sinne Hausdorffs normal lösbar ist.

Definition 5: Ist T ein Noetherscher Operator, so heisst die Differenz

$$\nu - \nu_*$$

Index von T :

$$\text{ind } T = \nu - \nu_* .$$

Satze von Atkinson :

1.) Der lineare und beschränkte Operator T, der E_1 in E_2 abbildet, ist genau dann ein Noetherscher Operator, wenn lineare und beschränkte Operatoren U_1 und U_2 existieren, die E_2 in E_1 abbilden, so dass $U_1 T$ und $T U_2$ Noethersche Operatoren sind.

2.) Ist T ein Noetherscher Operator und V ein beliebiger vollstetiger Operator, der E_1 in E_2 abbildet, dann ist T + V ebenfalls ein Noetherscher Operator und es gilt:

$$\text{ind } (T + V) = \text{ind } T .$$

Definition 6: Die Gleichung $T\varphi = f$ heisst "Noethersche" oder "Fredholmsche" Gleichung, je nachdem, ob T ein Noetherscher oder ein Fredholmscher Operator ist.

Im Fall der Noetnerschen Gleichung gelten die folgenden Sätze, die in der Theorie der singulären Integralgleichungen die Noetherschen Sätze heissen:

1.) Die homogenen Gleichungen $T\varphi = o$, $T^* l = o$, wobei T^* der zu T adjungierte Operator bedeutet, haben eine endliche Anzahl ν bzw. ν_* linear unabhängiger Lösungen in den Räumen E_1 bzw. E_2^* .

2.) Die Gleichung $T\varphi = f$ ist genau dann lösbar, wenn

$$l_j(f) = o \quad , \quad j = 1, \ldots, \nu_*$$

ist, wobei die $l_1, \ldots, l_{\nu_*}$ ein vollständiges System linear unabhängiger Lösungen der Gleichung $T^* l = o$ in E_2^* sind.

3.) $\operatorname{ind}(T + V) = \operatorname{ind} T$, (d.h. der Index von T ist unabhängig von einem additiven vollstetigen Teil) wobei V ein vollstetiger Operator ist, der E_1 in E_2 abbildet.

Literatur:

(1) Atkinson, F.V. — The normal solubility of linear equations in normed spaces. Mat. Sbornik N.S. 28 (7o), 3-14, 1951 (Russian).

(2) Gelfand, J.M.-Schilow, G.E. — Verallgemeinerte Funktionen Bde 1,2. Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1962

(3) Chvedelidze, B.V. — Lineare unstetige Randwertaufgaben der Funktionentheorie, singuläre Integralgleichungen und einige ihrer Anwendungen. Trudy Tbilissk. mat. Inst. Razmadze 23, 1956. (Russisch).

(4) Kakičev, V.A. — On some Fredholm equations, solvable in terms of singular Cauchy integrals. Izv. Vyss. Ucebn. Zaved. Matematika 1961, No 4 (23), 25-38. (Russian).

(5) Ljusternik-Sobolew, — Elemente der Funktionalanalysis. Akademie-Verlag, Berlin 196o.

(6) Muckhelishvili, N.J. Singular Integral Equations
Nordhoff, Groningen 1953.

(7) Nikolski, S. Linear equations in normed linear spaces. Bull. Acad. Sci. URSS, Ser. Mat.
(Izvestia Akad. Nauk SSSR) 7, 147-166, 1943 (Russian, english summary).

(8) Vekua J.N. Verallgemeinerte Analytische Funktionen.
Akademie - Verlag, Berlin 1963.